maxi. Sciences Physiques

PHYSIQUE & CHIMIE

Sc Maths

2ème Année du Baccalauréat

Sciences Mathématiques, Fillière A et B

Option Français

Tome 1

Cours & exercices corrigés

EDITIONS Plus

Scanned with CamScanner

X . Sciences Physiques

PHYSIQUE & CHIMIE

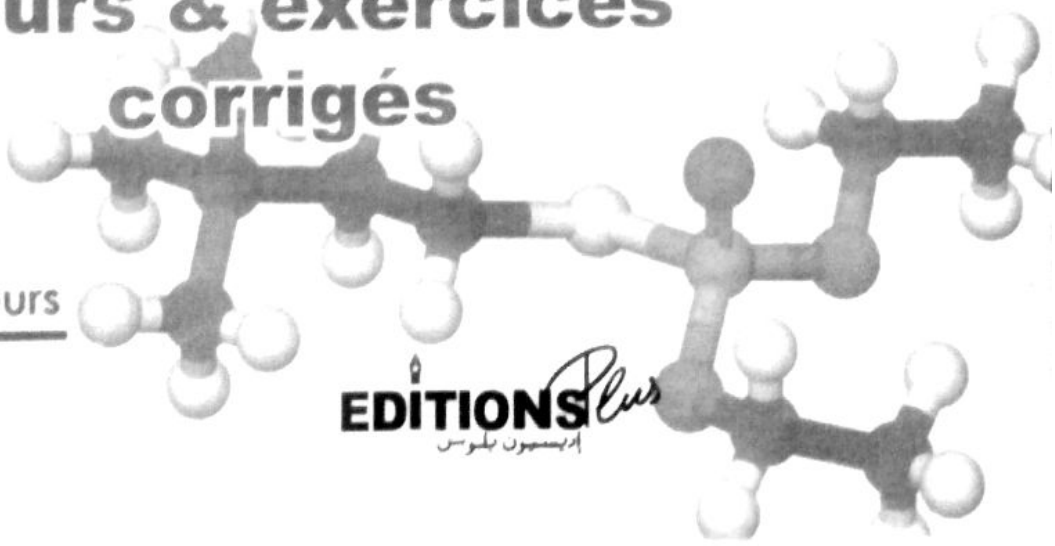
Tome 1

Option SM

2ème année baccalauréat

Option Sciences Math Section internationale du baccalauréat Marocain - Français

Cours & exercices corrigés



Groupe d'auteurs

EDITIONS Plus
إديسيون بلوس

Scanned with CamScanner

Tous droits réservés

EDITIONS Plus

MAXI SCIENCES PHYSIQUES

Cours & exercices corrigés

2ème année baccalauréat

Sciences Mathématiques (tome 1)

2ème édition: 2019

Dépôt légal: 2017MO1790

ISBN: 978-9954-682-38-8

Imprimerie Najah Al Jadida (CTP) - Casablanca

Préface

Cet ouvrage, en deux tomes, s'adresse aux élèves de la deuxième année du Baccalauréat Marocain, séries sciences mathématiques A et B, option (Français).

Sa conception répond à plusieurs nécessités:

- Vous permettre de mettre en oeuvre vos connaissances du cours vu en classe.
- Vous apprendre à rédiger la résolution d'un exercice.
- Développer vos capacités en vous confrontant à des situations difficiles, exigeant connaissances, organisation et méthode.

Chaque chapitre comprend les rubriques suivantes:

- Un rappel de cours, souvent détaillé et axé sur les notions fondamentales.
- Un large éventail d'exercices progressifs, allant des plus simples, Q.C.M et exercices. d'applications; au plus difficiles, ayant fait l'objet de contrôles en classes ou posés aux épreuves de l'Examen National du Baccalauréat.
- Des corrigés détaillés accompagnent tous les exercices, avec des commentaires, indiquant clairement l'étape de leur résolution; ce qui vous permet de juges la qualité de votre apprentissage, de remédier aux difficultés rencontrées, et d'aborder sereinement de nouvelle acquisitions.

Vous disposez ainsi d'un outil dont nous espérons que vous saurez tirer le meilleur parti.

Les auteurs

Scanned with CamScanner

SOMMAIRE

	Pages
Physique	
1- Ondes mécaniques progressives	6
2- Ondes mécaniques périodiques	24
3- Ondes lumineuses	50
4- Transformations nucléaires spontanées-Décroissance radioactive	76
5- Noyaux atomiques, masse-énergie	94
6- Dipôle RC	114
7- Dipôle RL	166
8- Oscillations électriques libres dans un circuit (RLC) série	197
9- Comportement d'un circuit (RLC) en régime sinusoïdal forcé.	231
Chimie	
1- Cinetique chimique I- Transformations chimiques rapides, et transformations lentes II- Suivi temporel d'une transformation chimique	258
2- Transformations chimiques limitées	278
3- Etat d'équilibre d'un système chimique	287
4- Transformations associées à des réactions acide-base en solution aqueuse	301

Physique

Scanned with CamScanner

1 ONDES MÉCANIQUES PROGRESSIVES

I- Définitions:

1 Définition d'une onde mécanique progressive:

Une onde mécanique progressive est le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu, sans transport de matière.

L'onde est dite progressive si elle se propage dans un seul sens, sans modification.

Une onde se transmet de proche en proche dans un milieu. Il n'y a pas de transport de matière;l'onde ne transporte que de l'énergie mécanique.

Exemple: Dans le cas de la figure 1, l'eau oscille verticalement, mais ne se déplace pas horizontalement avec l'onde (la vague).

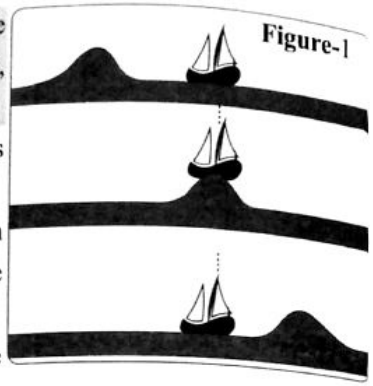
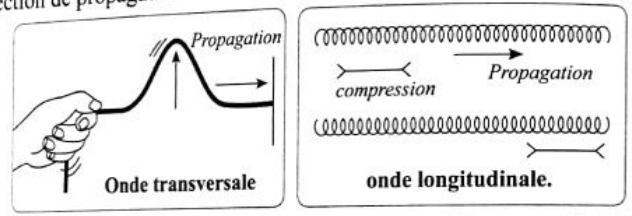


Figure-1

2 Onde transversale, onde longitudinale:

Une onde est longitudinale lorsque la perturbation se produit dans la même direction que la direction de propagation.

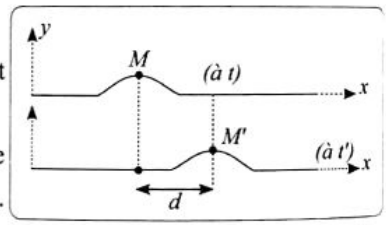


Une onde est transversale lorsque la perturbation se produit perpendiculairement à la direction de propagation.

3 Retard horaire:

L'état vibratoire du point M' à l'instant t' est identique à celui du point M à l'instant t.

La durée $\tau = t' - t$ est appelée retard horaire du mouvement de M' par rapport à M.



On exprime ceci par l'équation: $y_{M'}(t') = y_M(t)$ ou encore: $y_{M'}(t') = y_M(t' - \tau)$.

4 Célérité d'une onde:

La célérité de l'onde représente la vitesse à laquelle l'onde se propage.

La célérité d'une onde dépend des propriétés physiques du milieu. Elle ne dépend pas de l'amplitude de l'onde si celle-ci est faible.

Dans un milieu homogène et uniforme, la célérité d'une onde mécanique progressive est constante.

$$V = \frac{d}{\Delta t}$$

5 L'onde sonore:

5.1- Définition:

Une onde sonore est une onde mécanique progressive; longitudinale; due à une succession de compressions et de dilatations de couches du milieu de propagation.

5.2- Propriétés:

- La source sonore (l'émetteur sonore) comprime le couches d'air voisines de sa surface. L'air comprimé pousse les autres couches voisines, on obtient alors une propagation de proche en proche de cette compression.
- Dans le même milieu, deux ondes sonores différentes se propagent à la même vitesse.
- Le son se propage dans les gaz, les liquides et les solides.
- La vitesse du son est liée aux caractéristiques du milieu de propagation (composition, pression et température).

Exemple: Dans l'air, la célérité des ondes sonores s'exprime par la relation $V = \sqrt{\frac{1,4.R.T}{M}}$; M : masse molaire de l'air.

T : température absolue;

R : constante de gaz parfaits.

à $25°C$, V est voisine de $341 m.s^{-1}$.

Scanned with CamScanner

1

1- Une onde mécanique transporte:
(a) de la matière (b) de l'énergie

2- Une onde sonore transporte:
(a) de la matière (b) de l'énergie (c) de l'air

3- Une onde sonore est une onde:
(a) transversale (b) longitudinale

4- Plus un son est fort, plus sa propagation est rapide:
(a) Vrai (b) Faux

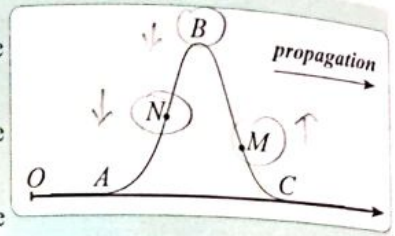
5- Plus un gaz est chaud, plus la célérité du son y est:
(a) élevée (b) basse

Solution

1- (b) ; 2- (b) ; 3- (b) | 4- (b) ; 5- (a)

2

Une onde transversale se propage le long d'une corde, à la célérité $v = 25m.s^{-1}$.
On donne $AC = 10cm$. On représente ci-contre l'aspect de la corde à un instant t.

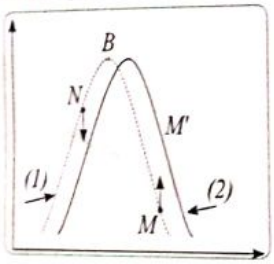


1- Sur la figure, indiquer quels sont les points de la corde qui se déplacent vers le haut, et ceux qui se déplacent vers le bas.

2- Quelle a été la durée t d'émission du signal? $t = \frac{AC}{v} = 4 \times 10^{-3}s$.

Solution

1- La déformation se déplace vers la droite suivant l'axe Ox.



A la date $t' > t$ (t' proche de t), elle occupe la position (2) sur le schéma. Cette position est obtenue par translation.

On remarque alors que le point M du milieu monte vers le haut et le point N descend vers le bas.

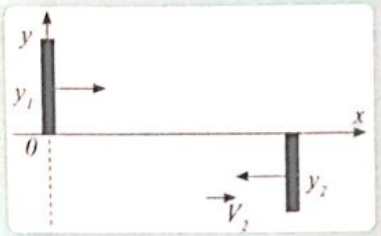
2- La durée de l'émission du signal est la durée pendant laquelle un point est en mouvement.

$$\Delta t = \frac{AC}{V} = \frac{10.10^{-2}}{25} = 4ms^{-1}.$$

3 Une onde transversale d'ordonnée $y_1 = 10mm$ se propage sur l'axe Ox à la vitesse V_1.
A la date $t = 0$; elle se trouve au point O.

- Une deuxième onde de même nature; d'ordonnée $y_2 = -4mm$ se propage à la vitesse V_2 dans le sens opposé suivant la même direction.
A la date $t = 0$; elle passe par le point A.

On donne: $V_1 = 30cm.s^{-1}$; $V_2 = 20cm.s^{-1}$; $OA = d = 50cm$.



1- Déterminer l'abscisse x du point M où les deux ondes se superposent.

2- Calculer l'ordonnée y de l'onde résultante.

3- Quelle est la date t_M.

Solution

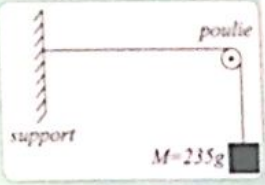
1- Pour atteindre le point M, à l'instant t:
- L'onde (1) parcourt la distance: $OM = x = v_1.t$;
- L'onde (2) parcourt la distance: $AM = v_2.t$
d'où: $\frac{OM}{v_1} = \frac{AM}{v_2}$;
avec: $AM = OA - OM = d - x$
On a alors: $\frac{x}{v_1} = \frac{d-x}{v_2}$; $(v_2 - v_1)x = v_1.d$; $x = \frac{v_1}{v_1 + v_2}.d$

$x = \frac{30}{50}.50cm = 30cm$

2- Au point M les deux ondes se superposent pour donner une onde résultante d'amplitude $y = y_1 + y_2$.
Soit: $y = 10 - 4 = 6mm$

3- $t_M = \frac{x}{v_1} = \frac{30}{20} = 1,5s$

4 La célérité d'une onde se propageant le long d'une corde dépend de la tension F de la corde et de sa masse linéique μ (masse par unité de longueur).
Une corde est tendue comme le montre la figure ci-contre.



Données: Masse de la corde $m = 176g$.
Longueur de la corde $\ell = 11m$; *et* $g = 9,8N.kg^{-1}$

1- Montrer en utilisant l'expression du théorème de l'énergie cinétique que: $1N = 1kg.m.s^{-2}$.

2- A l'aide d'une analyse dimensionnelle, choisir la bonne réponse pour l'expression de la célérité de cette onde; parmi les propositions suivantes:

a- $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; b- $F.\mu^2$; c- $F.\mu$; d- autre.

3- Choisir la bonne réponse pour la valeur de cette célérité:

a- $5m/s$; b- $12m/s$; c- $25m/s$; d- $30m/s$.

Scanned with CamScanner

1- Utilisons le théorème de l'énergie cinétique

On: $\Delta E_c = W = F.d$;

ou encore: $\frac{1}{2}mV^2 = F.d$

$F = \frac{1}{2}\frac{mV^2}{d}$; $[F] = \frac{M.L^2.T^{-2}}{L} = M.L.T^{-2}$

2-

$[V] = \left(\frac{[F]}{[\mu]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M.L.T^{-2}}{M.L^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = (L^2.T^{-2})^{\frac{1}{2}}$

$= L.T^{-1}$

Dans le système des unités internationales V est en $m.s^{-1}$.

3-

$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{M.g}{m/\ell}} = \sqrt{\frac{M.g.\ell}{m}}$

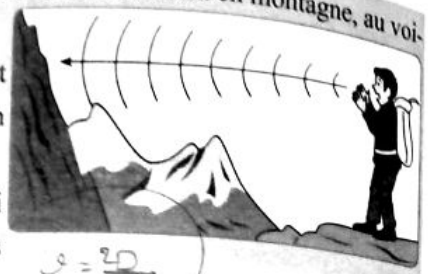
$V = \sqrt{\frac{0,235.9,8.11}{0,176}} \simeq 12 m.s^{-1}$

Bonne réponse (b).

5 **L'écho est la réflexion des bruits qui s'observe facilement en montagne, au voisinage d'une paroi rocheuse.**

Un randonneur mesure la durée séparant l'émission d'un bruit de la réception de son écho; il trouve $\Delta t = 3,5s$.

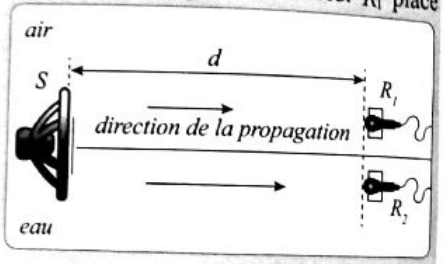
Calculer la distance du randonneur à la paroi rocheuse sachant que la célérité du son dans l'air vaut $v = 330 m.s^{-1}$.



Solution

$2d = V.\Delta t$; $d = \frac{V.\Delta t}{2} = \frac{330.3,5}{2} = 577,5m$

6 **Dans un bassin d'essais, une source sonore S émet un bruit intense qui se propage dans l'air et dans l'eau. Le bruit est reçu par deux récepteurs sonores: R_1 placé dans l'air et R_2 situé dans l'eau.**



Données: Célérité du son:

- Dans l'air: $v_a = 340 m.s^{-1}$
- Dans l'eau: $v_e = 1500 m.s^{-1}$

1- Quel est le récepteur qui, le premier, détecte le bruit produit par la source?

2- On note Δt la durée séparant la détection du bruit par les récepteurs R_2 et R_1. Exprimer la distance d séparant la source des récepteurs en fonction de la durée Δt et des célérités v_a et v_e.

3- Calculer la valeur de d pour $\Delta t = 0,50s$.

Solution

1- R_2 ; car l'onde sonore est beaucoup plus rapide dans l'eau que dans l'air.

2- Dans l'eau: $d = v_e.t_e$

et dans l'air: $d = v_a.t_a$.

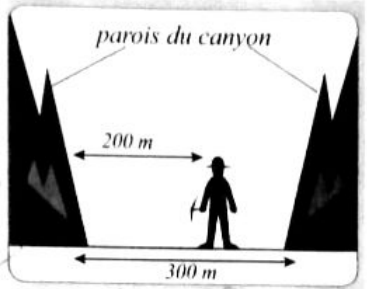
$\Delta t = t_a - t_e = \frac{d}{v_a} - \frac{d}{v_e} = \frac{v_e - v_a}{v_e.v_a}.d$

$d = \frac{v_e.v_a}{v_e - v_a}\Delta t$

3- $d = \frac{1500.340}{1500 - 340}.0,5 \simeq 220m$

7 **Un explorateur se trouve au fond d'un canyon, comme montré sur la coupe transversale ci-dessus. Il pousse un cri, et au bout d'un peu moins d'une seconde, il entend deux échos séparés par un bref intervalle de temps Δt.**

Déterminer Δt sachant que la célérité du son est $c_s = 340 m.s^{-1}$.



Solution

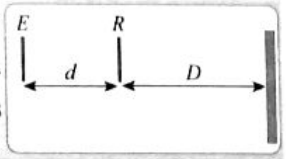
Le premier écho correspond à la réception du signal sonore réfléchi sur la paroi de droite, la plus proche, qui intervient au bout d'un temps $t_1 = \frac{2 \times d_d}{c_s}$, où d_d est distance à la paroi de droite, et où le facteur 2 est là puisque le son doit effectuer un aller et retour.

De la même manière, avec la paroi de gauche, on peut écrire $t_2 = \frac{2 \times d_g}{c_s}$, ce qui permet de dire que l'intervalle de temps est: $\Delta t = t_2 - t_1 = 2\frac{d_g - d_d}{c_s}$

$= 2 \times \frac{200 - 100}{340} \approx 0,59s$

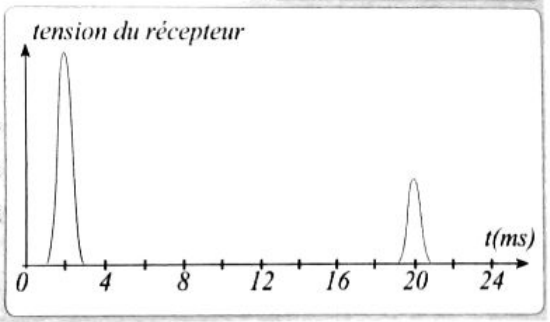
ou encore 6 dixième de seconde.

8 **Un émetteur d'ultrasons E envoie à l'instant $t = 0$ un signal qui se réfléchit sur un obstacle. On relève la tension aux bornes du récepteur R. La célérité des ondes dans l'air est $v = 340 m.s^{-1}$.**



1- Identifier les deux signaux visualisés.

2- Calculer la distance d entre l'émetteur et le récepteur, et la distance D entre le récepteur et l'obstacle.



Scanned with CamScanner

1- Le signal émis par E rencontre une première fois le récepteur, il se dirige ensuite vers l'obstacle, se réfléchit sur celui-ci, puis retourne vers le récepteur. Le premier pic, le plus intense, correspond à la réception de l'onde issue directement de l'émetteur.

Le second pic, moins intense, correspond à la réception de l'écho réfléchi sur l'obstacle. On remarque que la réflexion s'accompagne d'une certaine atténuation du signal.

2- Le signal est émis en $t = 0$. Il parcourt la distance $d = ER$ et est capté en $t_1 = 2ms$.

On a donc: $d = t_1 v = 68cm$.

Le signal parcourt alors 2 fois la distance qui sépare R de l'obstacle avant d'être à nouveau capté en $t_2 = 20ms$.

Il a donc parcouru la distance $2D$ pendant la durée $t_2 - t_1$.

On a donc:

$$D = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)v = 3,1m$$

9 La célérité v du son dans l'air est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue T.

1- Exprimer mathématiquement cette propriété.

2- On donne la célérité du son dans l'air à $15°C$: $v = 340m.s^{-1}$.

Calculer la célérité du son dans l'air à 0°C.

On donne: $T(K) = \theta°C + 273$.

Solution

1- $v = cte.\sqrt{T} = C.\sqrt{T}$

2- Lorsque $T = T_1$ on écrit: $v_1 = C.\sqrt{T_1}$; et lorsque $T = T_2$, on écrit: $v_2 = C.\sqrt{T_2}$.

alors: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

$V_2 = V_1.\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

à $15°C$: $T_1 = 15° + 273 = 288K$

et à $0°C$: $T_2 = 273K$

$V_2 = 340\sqrt{\frac{273}{288}} = 331m.s^{-1}$

10 La célérité d'une onde sonore dans un milieu matériel est donnée par: $v = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi_s}}$, où ρ est la masse volumique du milieu, et χ_s un coefficient caractérisant la compressibilité du milieu.

On donne ces grandeurs pour trois matériaux:

	Air	Eau	Acier
ρ	$1,2kg.m^{-3}$	$10^3kg.m^{-3}$	$7,8.10^3kg.m^{-3}$
X_s	$7,2.10^{-6}Pa^{-1}$	$5.10^{-10}Pa^{-1}$	$5.10^{-12}Pa^{-1}$

Calculer la célérité du son dans chacun de ces milieux. Quel est le paramètre physique qui prédomine pour la variation de cette célérité?

Solution

Calcul des célérités du son dans:

- l'air, $v = 340m.s^{-1}$.
- l'eau: $v = 1400m.s^{-1}$.
- l'acier: $v = 5000m.s^{-1}$.

Une augmentation de la masse volumique du milieu ($\rho_{air} < \rho_{eau} < \rho_{acier}$) entraîne une diminution de la célérité.

Une diminution de la compressibilité du milieu ($X_{s,air} > X_{s,eau} > X_{s,acier}$) entraîne une augmentation de la célérité.

Comme $v_{air} < v_{eau} < v_{acier}$, c'est la variation de compressibilité qui impose son effet sur la célérité dans ces trois milieux.

11 Un tube de pipeline en cours d'installation a été déposé au fond de la mer. Il est encore fermé aux deux extrémités et rempli d'air. Un plongeur frappe avec un marteau sur l'une des extrémités du tube du pipeline. Un second plongeur situé à l'autre extrémité du tube du pipeline perçoit trois coups.

1- Expliquer pourquoi le plongeur entend trois coups.

2- La célérité d'une onde sonore dans un gaz vérifie la relation suivante:

$V = \sqrt{\frac{\gamma.R.T}{M}}$; γ est une constante qui vaut 1,4 dans le cas de l'air, R est la constante des gaz parfaits, T est la température absolue et M la masse molaire du gaz. Les unités *S.I.* sont utilisées.

a- Vérifier l'homogénéité de l'expression de V.

b- Calculer la célérité du son dans l'air contenu dans le pipeline.

3- Les deux premiers coups sont perçus avec un décalage $\Delta t = 0,18s$. En déduire la longueur L du pipeline.

Données: $R = 8,31J.mol^{-1}$; K^{-1}; $\theta = 5,0°C$;

$M = 29g.mol^{-1}$; $V_{acier} = 5800m.s^{-1}$; $V_{eau} = 1500m.s^{-1}$.

Solution

1- Le son se propage dans trois matériaux différents: l'acier, l'eau, l'air.

La célérité du son est différente dans chacun de ces matériaux.

Il percevra trois sons distincts.

2.a-

$$[V] = \left(\frac{[R.T]}{[M]}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{M.L^2.T^{-2}.mol^{-1}.\theta^{-1}.\theta}{M.mol^{-1}}\right)$$

$$= L.T^{-1}$$

Scanned with CamScanner

La relation est homogène.

2- La température absolue vaut:

$T = 273 + 5,0 = 278K$

et: $M = 29.10^{-3} kg.mol^{-1}$.

$V = \sqrt{\frac{\gamma.R.T}{M}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,31 \times 278}{29.10^{-3}}}$

$= 3,3.10^{2} m.s^{-1}$

3- $\Delta t = \frac{L}{V_{eau}} - \frac{L}{V_{acier}}$;

d'où:

$L = \frac{\Delta t}{\frac{1}{V_{eau}} - \frac{1}{V_{acier}}} = \frac{0,18}{\frac{1}{1500} - \frac{1}{5800}}$

$= 3,6.10^{2} m$

12 Lors d'un orage, un éclair s'accompagne de l'émission d'une onde sonore (le tonnerre), et d'une onde lumineuse (la foudre). Un observateur est situé à la distance d du point d'impact de l'éclair. Il entend le tonnerre τ secondes après avoir vu l'éclair.

1- En prenant l'origine des temps à l'instant où l'éclair touche le sol, exprimer, en fonction de d et c, l'instant t_1 où l'éclair atteint l'observateur. Exprimer en fonction de d et de la célérité v de l'onde sonore l'instant t_2 où le tonnerre atteint l'observateur.

2- Exprimer τ en fonction de t_1 et t_2, et en déduire l'expression $d = \frac{v\tau}{1 - \frac{V}{c}}$.

3- Comparer v et c. Justifier que l'on peut écrire $d \approx v\tau$. Calculer d pour $\tau = 3s$.

Solution

1- La lumière parcourt la distance d pendant le temps $t_1 = \frac{d}{c}$. L'onde sonore parcourt cette même distance pendant $t_2 = \frac{d}{v}$.

2- L'intervalle de temps séparant la perception de l'éclair et du tonnerre par l'observateur est $\tau = t_2 - t_1$.

On a donc:

$\tau = d\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$, d'où $d = \frac{\tau}{\frac{1}{v} - \frac{1}{c}}$, soit en multipliant par v le numérateur et le dénominateur:

$d = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}}$.

3- On a numériquement $v \ll c$, soit $\frac{v}{c} \ll 1$.

Le dénominateur s'écrit alors $1 - \frac{v}{c} \approx 1$, d'où $d \approx v\tau$.

Pour $\tau = 3s$, on a: $d = 340 \times 3 \approx 1km$.

13 Le 23 février 2004, un séisme de magnitude 5,1 selon le Réseau national de surveillance sismique s'est produit à Roulans (dans le département du Doubs), à 20km au nord-est de Besançon. Ce séisme a été ressenti très largement en dehors du Doubs dans tout l'est de la France, en Suisse et dans le nord-ouest l'Allemagne, sans faire de victimes ni de dégâts significatifs.

Lors d'un séisme, des ondes traversent la Terre. Elles se succèdent et se superposent sur les enregistrements des sismomètres. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques traversées. C'est pourquoi les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure.

Parmi les ondes sismiques, on distingue:

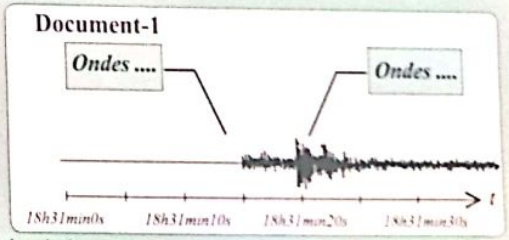
- les ondes P ou ondes primaires, qui sont des ondes de compression ou ondes longitudinales; leur célérité v_P vaut en moyenne $v_P = 6,0km.s^{-1}$.
- les ondes S ou ondes secondaires, appelées également ondes de cisaillement ou ondes transversales; leur célérité v_S vaut en moyenne $v_S = 3,5km.s^{-1}$.

L'écart entre les dates d'arrivée des ondes P et S renseigne, connaissant la célérité des ondes, sur l'éloignement du lieu où le séisme s'est produit.

Le document 1 (ci-après) présente un extrait de sismogramme relevé dans une station d'enregistrement après le séisme du 23 février de Roulans.

On notera t_0 la date correspondant au début du séisme, date à laquelle les ondes P et S sont générées simultanément.

Document-1



1- En utilisant des informations du texte encadré, associer, sur le document 1 (ci-dessus) à chaque signal observé sur le sismographe, le type d'ondes détectées (ondes S ou ondes P). Justifier.

2- Relever, sur ce document, les dates d'arrivée des ondes S et P à la station d'enregistrement notées respectivement t_S et t_P.

3- Soit d la distance qui sépare la station d'enregistrement du lieu où le séisme s'est produit.

Exprimer la célérité notée v_S des ondes S en fonction de la distance d parcourue et des dates t_S et t_0.

4- Retrouver l'expression de la distance d: $d = \frac{v_S.v_P}{v_P - v_S}(t_S - t_P)$

5- En déduire la valeur numérique de cette distance d.

6- A quelle heure s'est produit le séisme?

Scanned with CamScanner

Solution

1- Ce sont les ondes P qui sont les plus rapides.

2- $t_P = 18h31\min 15s$

et: $t_S = 18h31\min 20s$

3- La distance d séparant la source où s'est produit le séisme et la station de détection s'exprime:

- pour l'onde primaire:

$d = V_P.\Delta t_P = V_P(t_P - t_0)$

- et pour l'onde secondaire:

$d = V_S.\Delta t_S = V_S(t_S - t_0)$

4- Ces deux dernières expressions permettent d'écrire:

$t_0 = t_P - \frac{d}{V_P}$ et $t_0 = t_S - \frac{d}{V_S}$;

par identification on a: $t_P - \frac{d}{V_P} = t_S - \frac{d}{V_S}$

$d\left(\frac{1}{V_S} - \frac{1}{V_P}\right) = t_S - t_P$

$\frac{V_P - V_S}{V_S.V_P} = t_S - t_P$

$d = \frac{V_P.V_S}{V_S - V_P}.(t_S - t_P)$

5- $d = \frac{3,5.6,0.10^3}{6,0 - 3,5}.5 = 42.10^3 m = 42 km$

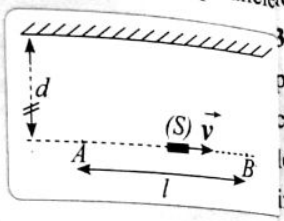
6- $t_0 = t_P - \frac{d}{V_P} = 18h31\min 15s - \frac{42.10^3}{6.10^3}s$

$= 18h31\min 15s - 7s$

$= 18h31\min 8s$

14 Une source sonore (S) se déplace à vitesse constante $V = 8,5 m.s^{-1}$ parallèlement à un mur qui lui est distant de $d = 20m$.

Au point A, cette source émet un signal sonore vers le mur, ce signal se réfléchit sur le mur et revient à la source au moment où celle - ci passe par le point B.



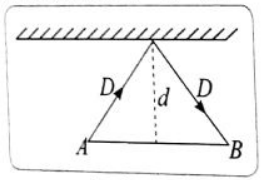
On donne: $AB = \ell = 1m$.

1- Exprimer la vitesse V_a du signal sonore dans l'air en fonction de V, d et ℓ.

2- Calculer sa valeur.

Solution

1- Pendant la durée $\Delta t = t_B - t_A$:



- le son parcourt la distance $2D = V_a.\Delta t$

- et, la source parcourt la distance: $\ell = V.\Delta t$

En combinant ces deux expressions, il vient: $\frac{2D}{V_a} = \frac{\ell}{V}$; alors: $\frac{V_a}{V} = \frac{2D}{\ell}$;

or $D = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + d^2}$

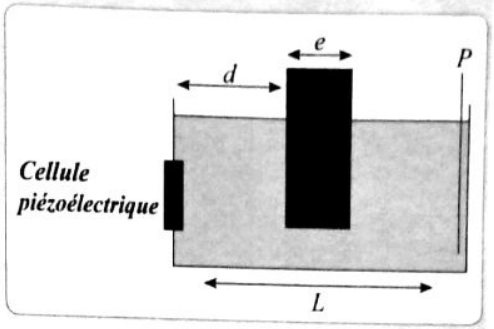
donc :

$V_a = \frac{2V}{\ell}.\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + d^2} = V\sqrt{1 + \left(\frac{2d}{\ell}\right)^2}$

2- $V_a = 8,5\sqrt{1 + \left(\frac{2.20}{1}\right)^2} \simeq 340 m.s^{-1}$

15 **Echographie:**

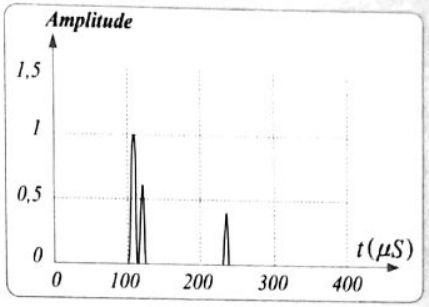
Une cellule piézoélectrique émet et reçoit des impulsions sonores se propageant dans une cuve remplie d'eau. Une plaque P, placée à l'autre extrémité de la cuve, réfléchit parfaitement les ondes ultrasonores, dont la célérité est $v_1 = 1540 m.s^{-1}$.



1- Quelle est la nature physique de la perturbation?

2- L'émetteur envoie une impulsion ultrasonore et reçoit un écho après une durée $t_1 = 260\mu s$.

Exprimer la largeur L de la cuve en fonction de v_1 et t_1.



3- On place dans la cuve un bloc parallélépipédique d'épaisseur e. La célérité des ondes ultrasonores dans le métal est c_2. L'émetteur envoie une impulsion à $t = 0$ afin de déterminer l'épaisseur du bloc, puis reçoit trois échos en t_2, t_3 et t_4.

Sur le graphe on mesure $t_2 = 104\mu s$, $t_3 = 116\mu s$ et $t_4 = 233\mu s$.

A quoi correspond chacun de ces trois échos?

4- Exprimer t_2 en fonction de d et v_1. En déduire la valeur numérique de d.

5- Exprimer t_3 en fonction de t_2, v_2 et e, puis t_4 en fonction de t_1, e, v_1 et v_2.

6- En déduire l'expression $e = \frac{v_1(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)}{2}$. Calculer numériquement e.

7- Calculer la valeur de la célérité v_2.

Solution

1- La propagation de l'onde ultrasonore est associée à une alternance de compressions et de dilatations du milieu de propagation.

2- On a: $L = \frac{1}{2}v_1 t_1$, soit $L = 20cm$.

Il ne faut pas oublier que le délai t_1, correspond à un aller - retour sur la distance L d'où le coefficient $\frac{1}{2}$ utilisé

Scanned with CamScanner

dans la relation entre L, v_1 et t_1.

3- Le premier écho correspond à la réflexion de l'onde ultrasonore sur la face avant du bloc; le second à la réflexion sur la face arrière du bloc; le dernier à la réflexion en bout de cuve.

4- On a: $t_1 = \frac{2d}{v_1}$.

soit $d = \frac{1}{2} v_1 t_2 = 8cm$.

5- On peut écrire que:

$t_3 = t_2 + \frac{2e}{v_2}$ car le second écho correspond à un trajet aller retour dans le bloc supplémentaire par rapport au premier écho.

Par ailleurs,

$t_4 = \frac{2(L-e)}{v_1} + \frac{2e}{v_2} = t_1 + 2e\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$.

6- Comme $t_3 = t_2 + \frac{2e}{v_2}$, on a:

$t_4 = t_1 + t_3 - t_2 - \frac{2e}{v_1}$.

soit $e = \frac{v_1(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)}{2}$

L'application numérique donne: $e = 3cm$

7- On a montré que $t_3 = t_2 + \frac{2e}{v_2}$, soit:

$v_2 = \frac{2e}{t_3 - t_2} = 5000 m.s^{-1}$

16 Le courant nécessaire à l'alimentation de la motrice d'un TGV est amené par un câble horizontal (la caténaire) tendu au-dessus du train, et prélevé par un bras articulé (le pantographe) situé sur le toit de la motrice. Le pantographe soulève localement le câble, donnant ainsi naissance à des ondes transversales et unidimensionnelles.

1- La caténaire est constituée d'un câble de cuivre d'une section de 1500mm². La densité du cuivre est de 8,9.

Vérifier que la masse linéique du câble est $\mu = 1,33 kg.m^{-1}$.

2- la célérité des ondes mécaniques le long du câble est $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, où T est la tension du câble et μ sa masse linéique. La tension du câble est de 2600 décanewtons. Calculer la célérité v des ondes (en $km.h^{-1}$).

3- L'amplitude de la déformation du câble augmente de façon importante lorsque la vitesse du train s'approche de la célérité des ondes. Le soulèvement de la caténaire perturbe alors le captage du courant, ce qui peut entraîner la disjonction du moteur ou des avaries sur les installations. La compagnie impose à la vitesse du TGV de ne pas excéder 70% de la célérité des ondes. Calculer la vitesse maximale d'un TGV dans ces conditions.

4- Pour franchir la barre des $500 km.h^{-1}$, il faut augmenter la célérité des ondes. Proposer deux méthodes.

5- On remplace le cuivre par du cadmium, de densité 8,65. Calculer la section du câble (en mm^2) pour obtenir la célérité $v = 532 km.h^{-1}$ sans modifier la tension du câble.

6- La solution précédente étant trop lourde à mettre en œuvre (emplacement de la caténaire), on choisit d'augmenter la tension du câble.

Quelle doit être sa valeur pour avoir $v = 532 km.h^{-1}$?

Solution

1- La section du câble est:

$s = 150.10^{-6} m^2$.

L'unité de longueur a donc pour volume $s \times 1 = 150.10^{-6} m^3$.

La densité du cuivre étant de 8,9, sa masse volumique vaut donc $8900 km.m^{-3}$.

La masse d'une unité de longueur du câble est donc:

$\mu = 150.10^{-6} \times 8900 = 1,33 kg$.

2- Pour $T = 26000N$ et $\mu = 1,33 kg.m^{-1}$, on obtient $v = 140 m.s^{-1}$, soit $503 km.h^{-1}$.

3- La vitesse maximale du TGV est:

$0,7 \times 503 = 352 km.h^{-1}$.

4- Comme $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, pour augmenter v, on peut:

- augmenter la tension T du câble;
- diminuer la masse linéique μ du câble.

5- On a: $T = 26000N$, et on veut:

$v = 532 km.h^{-1} = 148 m.s^{-1}$.

Il faut donc $\mu = 1,19 kg.m^{-1}$.

La masse volumique du câble est $1000d$.

La masse de la longueur unité, de section s, est alors: $\mu \times 1 = 1000d \times s \times 1$.

On a donc:

$s = \frac{\mu}{1000d}$

$s = 0,138.10^{-3} m^2 = 138 mm^2$

6- on veut atteindre la célérité:

$v = 532 km.h^{-1} = 148 m.s^{-1}$.

La tension à utiliser est:

$T = \mu.v^2 = 1,33 \times 148^2 = 29100N$

Scanned with CamScanner

17 Lorsque le cœur se contracte pour relancer la circulation sanguine, il provoque l'émission d'une onde: le pouls, qui se propage le long des artères: dont les parois se dilatent lorsque la pression sanguine augmente.

1- S'agit-il d'une onde longitudinale ou transversale?

2- La célérité de cette onde dépend-elle de l'élasticité des artères et de la vitesse du sang dans les artères?

3- La célérité du pouls est donnée par $v = \frac{1}{\sqrt{\rho D}}$, où ρ est la masse volumique du sang, et D un coefficient caractérisant l'élasticité de l'artère.

A l'aide de l'analyse dimensionnelle, déterminer la dimension de D.

4- On donne: $D = \frac{\Delta S}{S_0}\frac{1}{\Delta P}$, où S_0 est la section de l'artère au repos, ΔP la variation de la pression sanguine due au pouls, et ΔS l'augmentation de la section de l'artère correspondante. Chez un sujet jeune, on a: $\frac{\Delta S}{S_0} = 0,5$: le volume de l'artère augmente de 50%. Sa pression artérielle est de $\frac{13}{8}$, ce qui signifie $\Delta P = 13 - 8 = 5 cmHg$.

Sachant que $1 cmHg = 1,3 kPa$, calculer la célérité du pouls; on donne: $\rho = 1000 kg.m^{-3}$.

Comparer avec la vitesse d'écoulement du sang qui est d'environ $30 cm.s^{-1}$.

5- Expliquer la pulsation que l'on ressent en appliquant la main sur le poignet.

6- Le sujet prend son pouls simultanément au cou et au poignet. On considère le cou à 20cm du cœur, et le poignet à 80cm du cœur. Détecte-t-il les deux pouls en même temps? Sinon, avec quel décalage?

Solution

1- L'onde se propage le long de l'artère. La perturbation est une dilatation locale de l'artère. Cette déformation est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

Il s'agit donc d'une onde transversale.

2- la célérité d'une onde mécanique ne dépend que des propriétés physiques du milieu: elle dépend donc de l'élasticité des artères, mais pas de la vitesse du sang.

3- On a: $D = \frac{1}{\mu V^2}$.

La dimension de la masse volumique est $[\rho] = M.L^{-3}$.

Celle de la vitesse est: $[V] = L.T^{-1}$.

On a donc:

$[D] = \left[\frac{1}{\rho v^2}\right] = M^{-1}.L^3.L^{-2}.T^2$

$[D] = L.M^{-1}.T^2$

Dans le système international, D s'exprime donc en $m.kg^{-1}.s^2$.

4- On a: $\Delta P = 5 \times 1,3.10^3 Pa$.

$v = \sqrt{\frac{5 \times 1,3.10^3}{0,5 \times 1000}} = 3,6 m.s^{-1}$

La célérité du pouls est sensiblement supérieure à la vitesse d'écoulement du sang.

5- La pulsion ressentie lorsque l'on applique la main sur le poignet ou le cou est due à la dilatation de l'artère à cause de la surpression sanguine.

6- La distance entre le poignet et le cœur est plus grande de 60cm que celle entre le cou et le cœur. Le pouls se propageant à la célérité $v = 3,6 m.s^{-1}$, il arrive au poignet avec un décalage de $\Delta t = \frac{0,6}{3,6} \approx 0,2 s$.

18 Une onde est créée à l'extrémité A d'une corde AB de longueur L.

La célérité de l'onde dans cette corde est donnée par la relation: $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$;

μ est la masse linéique de la corde et F sa tension.

1- Pourquoi il est nécessaire de tendre la corde?

2- A l'aide d'une équation aux dimensions; exprimer le Newton en fonction de m, kg et s: unités fondamentales de la mécanique.

3- Retrouver ce résultat en utilisant la signification de l'unité Joule en mécanique.

4- L'énergie portée par l'onde a pour expression $E = k.a^2$ où a est l'amplitude de l'onde et k un coefficient de proportionnalité.

A l'extrémité A de la corde, l'amplitude de l'onde est a_0 et l'énergie de l'onde en ce point est $E_0 = k.a_0^2$.

La corde dissipe une partie de l'énergie de l'onde pendant sa propagation, c'est un milieu dissipatif: 10% de l'énergie portée par l'onde est dissipée chaque fois qu'elle parcourt la distance $\ell_1 = 1,0m$ de la corde.

On pose: $10\% = \tau$.

4.1- Soit a_1 l'amplitude de l'onde lorsqu'elle parcourt la distance $\ell_1 = 1m$ à partir de A.

Etablir la relation: $a_1 = a_0(1-\tau)^{\frac{1}{2}}$

4.2- En déduire que l'amplitude de l'onde en B peut s'écrire sous la forme:

Scanned with CamScanner

$a_B = a_0.(1-\tau)^{\frac{L}{2\ell_1}}$

4.3- L'amplitude minimale détectable est telle que: $a_{min} = 10^{-2}.a_0$

Quelle est la valeur maximale de L pour que l'onde soit détectable?

On donne: $a^x = b$

alors: $xLna = Lnb$; Ln: Logarithme népérien.

Solution

1- Lorsque $F = 0$, $v = 0$, alors la déformation ne se propage pas; il n'y a donc plus d'onde.

2- L'expression de V donne; $F = V^2.\mu$;

alors:

$[F] = [\mu].[V]^2 = M.L^{-1}.(L.T^{-1})^2 = M.L.T^{-2}$

Dans le système des unités internationales; ce résultat donne: $1N = 1kg.m.s^{-2}$.

3- Le Joule est l'unité du travail d'une force et aussi celle de l'énergie cinétique.

La formule $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ donne:

$[E_c] = M.(L.T^{-1})^2 = M.L^2.T$

Et l'expression du travail d'une force donne:

$[W] = [F].[d].[\cos\alpha] = [F].L$

E_c et W ont la même dimension, alors:

$[F].L = M.L^2.T^{-2}$;

d'où: $[F] = M.L.T^{-2}$

Soit en unités (S.I): $1N = 1kg.m.s^{-1}$

4.1- Soit E_1 l'énergie que possède l'onde après avoir parcouru la distance $AM_1 = \ell_1 = 1m$.

Au point M_1, l'énergie perdue par l'onde représente: 10% de $E_0 = \tau.E_0$;

l'énergie restante E_1 est donc:

$E_1 = E_0 - \tau E_0 = (1-\tau)E_0$

alors: $ka_1^2 = (1-\tau)k.a_0^2$;

d'où: $a_1 = a_0(1-\tau)^{\frac{1}{2}}$

4.2- Soit le point M_2 tel que $M_1M_2 = \ell_1 = 1m$.

En ce point l'onde perd:

$10\%E_1 = \tau.E_1$;

elle garde donc l'énergie:

$E_2 = E_1 - \tau E_1 = E_1(1-\tau)$

alors: $ka_2^2 = k.a_1^2(1-\tau)$

ou bien: $a_2 = a_1.(1-\tau)^{\frac{1}{2}}$

or: $a_1 = a_0(1-\tau)^{\frac{1}{2}}$

donc: $a_2 = a_0(1-\tau)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$; en $M_2 = (AM_2 = 2\ell_1)$

Au point M_3 tel que $M_2M_3 = \ell_1 = 1m$

$E_3 = (1-\tau)E_2$

$a_3 = a_2(1-\tau)^{\frac{1}{2}} = a_0(1-\tau)^{\frac{3}{2}}$; $(AM_3 = 3\ell_1)$

De la même manière:

$a_4 = a_0(1-\tau)^{\frac{4}{2}}$; $(AM_4 = 4\ell_1)$

$a_5 = a_0(1-\tau)^{\frac{5}{2}}$; $(AM_5 = 5\ell_1)$

A l'extrémité B de la corde:

$AB = AM_n = n\ell_1 = L$

$a_B = a_n = a_0(1-\tau)^{\frac{n}{2}}$

ou bien: $a_B = a_0.(1-e)^{\frac{L}{2\ell_1}}$

4.3- Pour que l'onde soit détectable il faut au moins une amplitude $a = a_{min} = 10^{-2}.a_0$.

C'est-à-dire:

$a_0(1-\tau)^{\frac{n}{2}} \geq 10^{-2}a_0$

$(1-\tau)^{\frac{n}{2}} \geq 10^{-2}$

On utilise l'opérateur Ln:

$\frac{n}{2}Ln(1-\tau) \geq -2Ln10 = -4,6$

$n.Ln0,9 \geq -9,2$

$-0,105n \geq -9,2$

$n = \frac{L}{\ell_1} \leq \frac{9,2}{0,105} = 87,6$

$L \leq 87,6\ell_1 = 87,6m = L_{max}$

Scanned with CamScanner

2 ONDES MÉCANIQUES PROGRESSIVES PERIODIQUES

I- Onde périodique:

1 Onde périodique:

Une onde est dite périodiques, lorsque le mouvement de la source se rép identiquement à lui-même.

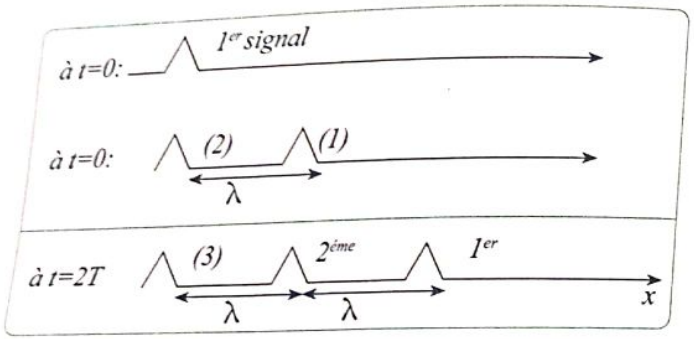
2 Période temporelle:

C'est la durée T séparant signaux successifs à la source.

La fréquence est le nombre N de signaux créées par la source pendant une second

3 Longueur d'onde: ($1^{ère}$ définition)

C'est la distance parcourue par chaque signal de l'onde périodique pendant une pério T.



La définition de λ permet d'écrire:

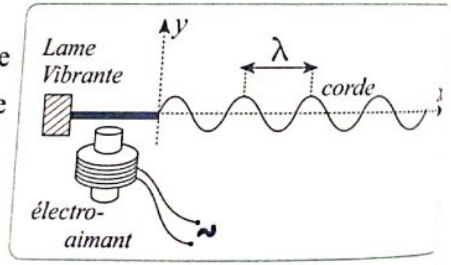
$$\lambda = V.T = \frac{V}{N} \quad T(s); V(m.s^{-1}) \ ; \ N(Hz) \text{ et } \lambda(m).$$

4 Exemples: Obtention des ondes périodiques au laboratoire:

4.1- Corde vibrante:

- Périodicité spatiale: $y = f(x)$

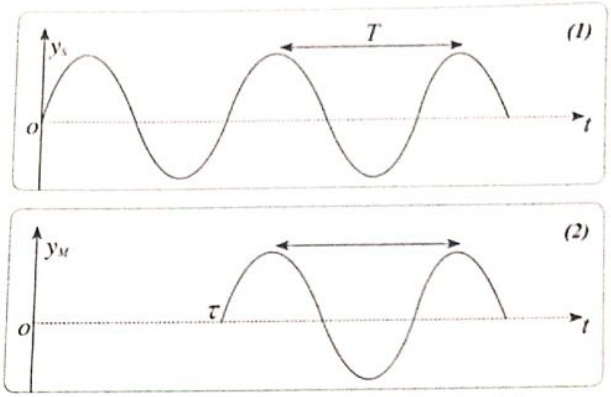
L'aspet de la corde a; à chaque instant une forme sinusoïdale $y = f(x)$, périodique de période λ (période spaciale).



Périodicité temporelle: $y = f(t)$

La fonction $y = f(t)$ permet de décrire le mouvement vibratoire d'un point de la corde en fonction du temps.

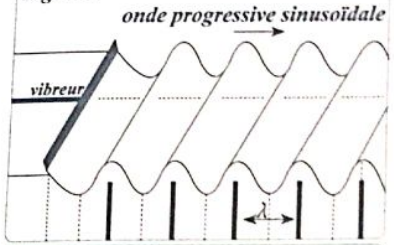
Si la source S commence à vibrer vers le haut à $t = 0$ figure (1), alors tout point M du milieu (la corde) répète le mouvement de S, mais avec le retard $\tau = \frac{\delta M}{V}$.



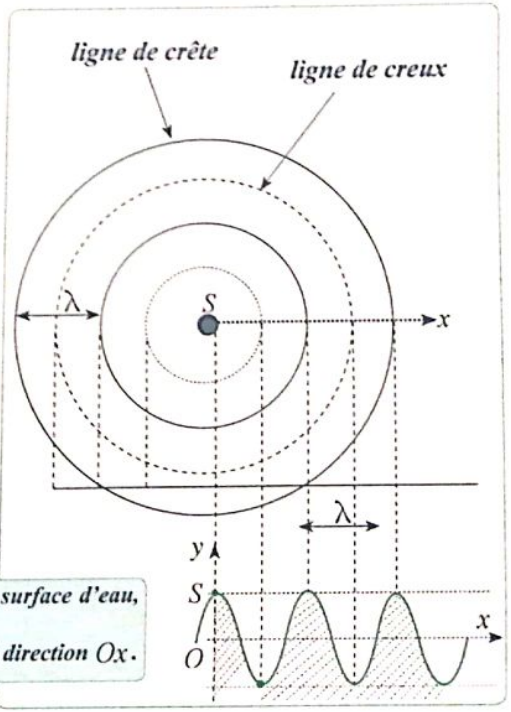
4.2- Ondes périodiques sinusoïdales à la surface d'un liquide.

Le montage de la cuve à ondes permet d'obtenir soit une onde périodique dont les lignes sont rectilignes fig (1), soit une onde périodique de lignes circulaires figure (2).

Figure 1



- En haut: vue en coupe (forme sinusoïdale)
- En bas: vue de dessus



- En haut: vue de dessus de la surface d'eau, lorsque S est à son maximum
- En bas: vue en coupe suivant la direction Ox.

Scanned with CamScanner

5 Comparaison du mouvement de deux points:

5-1- Vibrations en concordance de phase:

Deux points du milieu de propagation vibrent en phases si la distance d qui les sépa
est telle que: $d = k\lambda$; $(k \in \mathbb{N}^*)$

On peut aussi utiliser le décalage horaire τ entre ces deux points.

$$\tau = \frac{d}{V} = \frac{k\lambda}{V} = kT$$

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{\tau}{T} = k \qquad k = 1 \Rightarrow d_{min} = \lambda$$

Autre définition de la longueur d'onde.

La longueur d'onde d'une onde périodique est la distance minimale séparant deux points vibrant en phase.

5.2- Vibrations en opposition de phase:

Deux points vibrent en opposition de phase si la distance qui les sépare vérifie
condition: $d = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$, $k \in \mathbb{N}$

Ou encore: $\tau = \left(k + \frac{1}{2}\right).T$ $\qquad \frac{d}{\lambda} = \frac{\tau}{T} = k + \frac{1}{2}$

6 Phénomène de diffraction:

- **La diffraction** est une modification de la direction de propagation d'une ond
périodique. Elle se manifeste en particulier dans le cas d'ondes progressives sinusoïdale
rencontrant une ouverture ou un obstacle du même ordre de grandeur que la longue
d'onde.

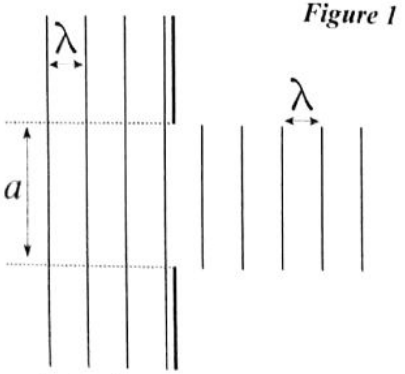
- **L'onde diffractée** est déformée, mais sa longueur d'onde, sa vitesse et sa fréquence ne sont pas modifiées.

- **Influence des dimensions de l'ouverture ou de l'obstacle:**

• Si $a >> \lambda$, une onde arrivant sur l'objet ne subit pas de phénomène de diffraction: elle est simplement diaphragmée fig (1).

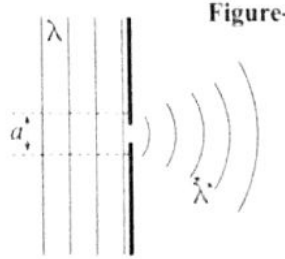
• Si $a \leq \lambda$, l'onde est diffractée. Une onde qui, avant l'ouverture, se propageait dans une seule direction, se propage ensuite dans toutes les directions.

Figure 1



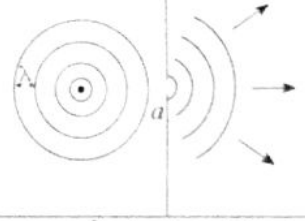
$a >> \lambda$: *l'onde est diaphragmée*

Figure-2



$a < \lambda$, *l'onde est diffractée*

Figure-3

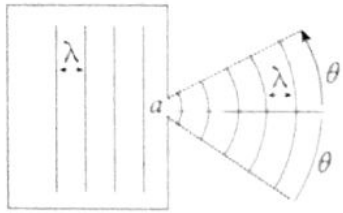


$a < \lambda$: *l'onde est diffractée*

Remarques: - L'onde diffractée semble provenir d'une source virtuelle, et ponctuelle se trouvant au centre de l'ouverture ou de l'obstacle.

- L'angle d'ouverture 2θ de l'onde diffractée (dépend de a et λ: $\theta \simeq \frac{\lambda}{a}$, ($\theta$ en radians).

Figure-4



7 Dispersion d'une onde périodique dans un milieu:

Lorsque la célérité v d'une onde progressive périodique dans un milieu dépend de la fréquence de l'onde, on dit que le milieu est dispersif.

Remarque: Si le milieu est dispersif, la célérité v dépend de la longueur d'onde.

Exemples:

Une corde de piano est un milieu dispersif.

L'air n'est pas un milieu dispersif pour les ondes sonores.

Scanned with CamScanner

Exercices

1 On produit une onde sonore en utilisant un haut-parleur émettant un son de fr
quence $N = 4,0kHz$.
La mesure de la longueur d'onde a donné $\lambda = 8,25cm$.
1- Donner la définition de la longueur d'onde λ.
2- Quelle est la valeur de la vitesse du son dans l'air?
3- Le haut-parleur émet le même son dans un gaz autre que l'air. Parmi les grandeu
fréquence, vitesse du son, longueur d'onde, lesquelles vont se trouver modifiées?

Solution

1- La longueur d'onde λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période, ou encore la distance séparant deux compressions successives.

2- D'après cette définition on a:

$\lambda = VT = \frac{V}{N}$;

D'où:

$V = \lambda N = 8,25.10^{-2}.4.10^{3} = 330m.s^{-1}$

3- A priori, il n'y a pas de raison pour que la vitesse du son dans ce nouveau gaz soit la même que dans l'air. La vitesse du son est une caractéristique physique intrin
que au gaz. En revanche, la fréquence e
elle, est imposée par le haut-parleur, c
envoie, du fait des vibrations de sa me
brane à $4KHz$ des ondes sonores dans
gaz qui ont nécessairement cette fréque
ce. Enfin, puisque la vitesse du son est
férente et que la fréquence est la mê
on déduit, des formules de la question pr
cédente, que la longueur d'onde est dif
rente dans ce nouveau gaz.

2 L'homme est sensible aux sons dont les fréquences varient entre $100Hz$ e
$20kHz$. La célérité des ondes sonores dans l'air est $v = 340m.s^{-1}$.
Donner l'ordre de grandeur des dimensions des ouvertures ou des obstacles qui son
diffractés ces ondes.

Solution

A la fréquence $f_1 = 100Hz$ (sons graves) correspond la longueur d'onde

$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{340}{100} = 3,4m$

A la fréquence $f_2 = 20kHz$ (sons aigus) correspond la longueur d'onde:

$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{340}{20000} = 1,7cm$.

Les sons graves seront donc diffract
par des ouvertures ou des obstacles do
les dimensions sont inférieures ou égal
à quelques mètres. Les sons aigus sero
diffractés par des ouvertures ou des ob
tacles dont les dimensions sont inférieur
ou égales à quelques centimètres.

3 Une corde de piano a une longueur $l = 42cm$ et une masse linéique $\mu = 6,2g.m^{-1}$.
La corde vibre sinusoïdalement avec une longueur d'onde $\lambda = 2l$.
La célérité des ondes transversales est $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; où T est la tension de la corde.
1- Calculer la fréquence de l'onde pour une tension $T = 900N$.
2- Le piano est désaccordé. Pour obtenir un «la» de fréquence $f = 440Hz$, faut-il augmenter ou diminuer la tension de la corde?
3- Calculer la nouvelle tension de la corde.

Solution

1- La célérité des ondes transversales étant donnée par $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la fréquence de l'onde s'exprime par:

$f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ (1)

$f = \frac{1}{0,84}\sqrt{\frac{900}{6,2.10^{-3}}} = 454Hz$

2- D'après la formule établie à la question précédente, la fréquence de l'onde augmente quand la tension de la corde augmente. On veut une fréquence plus basse, il faut donc diminuer la tension de la corde.

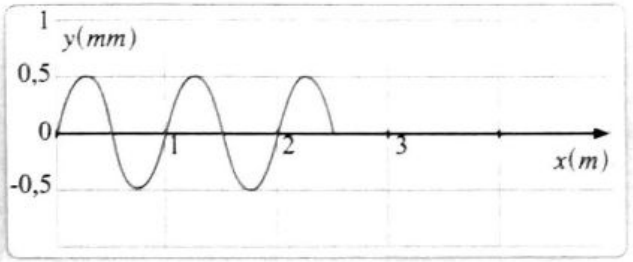
3- La relation (1) permet d'obtenir:

$T = \mu f^2 \lambda^2 T$

$T = 6,2.10^{-3} \times 440^2 \times 0,84^2$

$T = 847N$

4 Un vibreur est relié à l'extrémité S d'une corde. A l'instant $t = 0$, le vibreur est mis en mouvement. L'aspect de la corde au bout d'un temps de $200ms$ est représenté ci-dessous, l'origine des abscisses $x = 0$ correspond à la position de l'extrémité S.



1- Déterminer pour cette onde, la période spatiale et la période temporelle.
2- Calculer la célérité de cette onde.
3- A l'instant $t = 0$ le vibreur commence-t-il à vibrer vers le haut ou vers le **bas? Justifier.**
4- Représenter la courbe de $y = f(t)$, pour le point M d'abscisse $x = 3m$.

Scanned with CamScanner

Solution

1- La fonction $y = f(x)$ admet pour période λ

$\lambda = 1m$

Pendant la durée $\Delta t = 200ms$, déparant l'instant de départ de l'onde de la source et son arrivée au point (front de l'onde), la distance parcourue par l'onde est :

$$d = V.\Delta t \ (1)$$

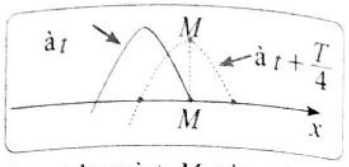
$$\text{or } \lambda = V.T \ (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{\Delta t}{T} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2,5\lambda}{\lambda} = 2,5$$

$$T = \frac{\Delta t}{2,5} = \frac{200}{2,5} = 80ms$$

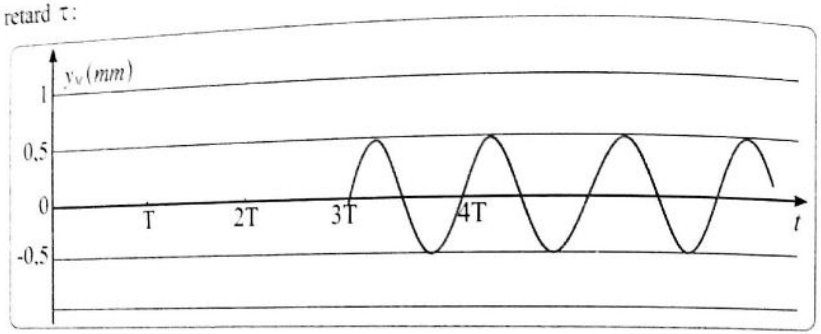
2- $V = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{80.10^{-3}} = 12,5m.s^{-1}$

3- Faisons la translation de la courbe $y = f(x)$ de $\frac{\lambda}{4}$.



A la date t le point M vient de recevoir l'onde; et à $t + \frac{T}{4}$, ce point va se trouver au maximum y_{max} donc son mouvement s'effectue vers le haut. Et, puisque tout point reproduit le même mouvement effectué par la source; alors le vibreur a commencé à vibrer spour la première fois vers le haut.

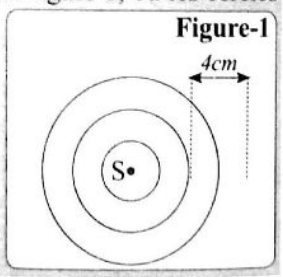
4- Le point M reproduit le même mouvement effectué par la source, mais avec un retard τ :



5 Un vibreur de fréquence $N = 20Hz$ crée à partir d'une date $t_0 = 0$, une onde au point S à la surface d'eau d'une cuve à onde.

A la date t_1, l'image de la surface d'eau est représentée sur figure 1, où les cercles représentent des crêtes.

Figure-1



1- Quel est le type de l'onde obtenue?

2- Déterminer sa longueur d'onde λ et en déduire la vitesse de propagation de cette onde.

3- Quelle est la valeur de la date t_1 ?

4- On considère deux points M et N de la surface d'eau, tels que:

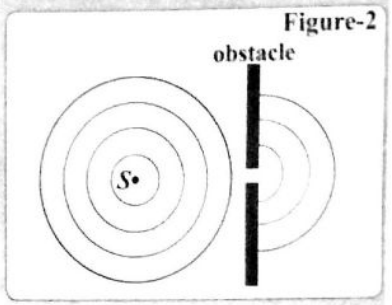
$SM = \frac{2}{3} SN = 10cm$

4.1- Lequel de ces deux points est en retard par rapport à l'autre?

4.2- Quelle est la valeur τ de ce retard horaire?

4.3- Comparer l'état vibratoire de ces deux points.

Figure-2



5- On place dans la cuve deux plaques verticales séparées par une ouverture de longueur d.

L'image de la surface d'eau à la même fréquence $20Hz$ est représentée sur la figure 2.

5.1- Quel phénomène met en évidence cette figure?

5.2- Quelle condition doit satisfaire la distance d pour avoir cette image?

Solution

1- L'onde obtenue à la surface d'eau est une onde mécanique progressive périodique, transversale dont les lignes d'ondes sont circulaires.

2- $\lambda = \frac{4cm}{2} = 2cm$

$v = \lambda N = 2.10^{-2}.20 = 0,4m.s^{-1}$

3- La distance parcourue par le front d'onde entre: $t_0 = 0$ et t_1 est $d = 3\lambda = 6cm$.

$d = v.(t_1 - t_0) = v.t_1$

$t_1 = \frac{d}{V} = \frac{6.10^{-2}}{0,2} = 0,3s$

4.1- On remarque que N est situé après M : $SM = 10cm$ et $SN = \frac{3.10}{2} = 15cm$; N est en retard par rapport à M.

4.2- $MN = SN - SM = 15 - 10 = 5cm$

$$\tau = \frac{MN}{V} = \frac{5.10^{-2}}{0,4} = 0,125s$$

4.3- $\frac{MN}{\lambda} = \frac{5}{2} = 2,5$; $MN = \frac{5}{2}\lambda$.

Les deux points M et N vibrent donc en opposition de phase.

On peut également utiliser le rapport $\frac{\tau}{T}$:

$\frac{\tau}{T} = \frac{0,125}{5.10^{-2}} = 2,5$

Donc: $\tau = \frac{5}{2}T$, c'est aussi la condition de vibration en opposition de phase.

5.1- La diffraction par une fente.

5.2- $d \leq \lambda$; $d \leq 2cm$.

6 Un haut-parleur (HP) alimenté par un générateur de basse fréquence (GBF); émet une onde sonore qui se propage dans l'air.

Cette onde passe devant deux microphones R_1 et R_2 alignés avec le haut-parleur et reliés à un oscilloscope bi-courbe (figure 1).

1- On donne à la distance d la valeur $d_1 = 41cm$.

Scanned with CamScanner

La figure 2 donne les courbes visualisées.

La sensibilité horizontale de l'oscilloscope est $0,1ms/div$.

1.1- Faire correspondre, en justifiant chaque microphone à la courbe qui lui convient.

1.2- Déterminer la période T de l'onde étudiée.

2- On éloigne R_2 de R_1 (fixe) jusqu'à ce que les courbes deviennent à nouveau en phases, à ce moment on note $d = d_2 = 61,5cm$.

2.1- Déterminer la longueur de l'onde sonore étudiée.

2.2- Déterminer sa célérité V.

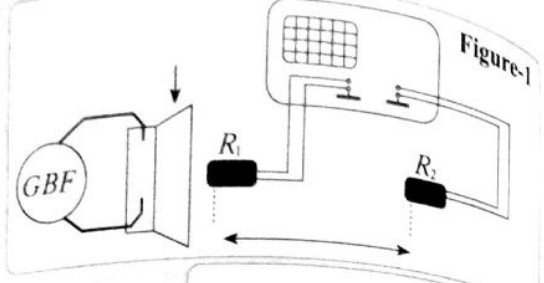


Figure-1

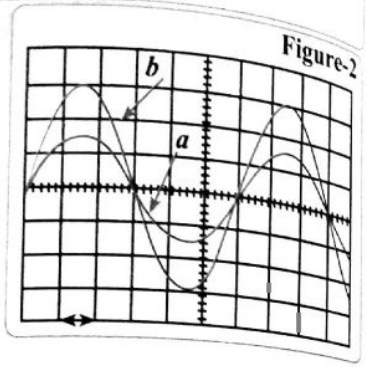


Figure-2

Solution

1.1- Le microphone R_2 est le plus éloigné de la source (HP), le son y parvient avec une intensité plus faible, il lui convient donc la courbe (a).

1.2- $T = 6div$.

$0,1ms/div = 0,6ms = 6.10^{-4}s$

2.1- Lorsque $d = d_1$, les courbes sont en phase, alors $d_1 = k.\lambda$ (1)

La concordance de phases suivante correspond à $k' = k + 1$ et elle est obtenue lorsque $d = d_2$; avec $d_2 = (k+1)\lambda$ (2)

D'où:

$$d_2 - d_1 = (k+1)\lambda - k\lambda = \lambda$$

$$\lambda = d_2 - d_1 = 61,5 - 41 = 20,5cm$$

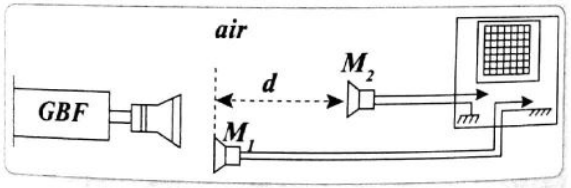
2.2- $V = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{20,5.10^{-2}}{6.10^{-4}} = 341,7m/s$.

7 Une onde sonore est produite par un haut-parleur alimenté par un générateur à haute fréquence; de valeur réglable.

Cette onde est captée par deux microphones M_1 et M_2 séparés par une distance $d = 1,7m$.

Lorsqu'on fixe la fréquence sur la valeur $N_1 = 1kHz$, on constate que les deux ondes reçues par M_1 et M_2 sont en phase.

A partir de la valeur N_1 on élève la fréquence du GBF lentement, on constate



que les deux courbes se décalent et redeviennent en phase lorsque la fréquence est $N_2 = 1,2kHz$.

1- Montrer que la vitesse V de l'onde sonore s'exprime de la façon suivante: $V = (N_2 - N_1)d$.

2- Calculer V.

Solution

1- Les deux tranches d'air devant M_1 et M_2 vibrent en phases à N_1 et à N_2 alors:

$d = k\lambda_1 = k.\dfrac{V}{N_1}$ et $d = k'.\dfrac{V}{N_2}$, d étant constante.

La condition $d = k\dfrac{V}{N}$ permet de constater que lorsque f augmente de N_1 à N_2, alors la valeur de k augmente en passant de k à $k' = k + 1$.

$$d = k.\frac{V}{N_1} = (k+1)\frac{V}{N_2}$$

$$\frac{k}{N_1} = \frac{k+1}{N_2} = \frac{k}{N_2} + \frac{1}{N_2}$$

$$k\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) = \frac{1}{N_2} \; ; \; k.\frac{(N_2 - N_1)}{N_1 N_2} = \frac{1}{N_2}$$

$$k = \frac{N_1}{N_2 - N_1}$$

Donc:

$$d = k.\frac{V}{N_1} = \frac{N_1}{N_2 - N_1}.\frac{V}{N_1} = \frac{V}{N_2 - N_1}$$

$$V = d(N_2 - N_1)$$

2-

$V = 1,7.10^{-2}.200 = 340m.s^{-1}$.

8 **1-** Lorsque l'on augmente la fréquence d'une onde, à célérité fixée, on:

(a) augmente **(b) diminue**

sa longueur d'onde.

2- La célérité de la houle en plein océan est $v = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$, où λ est la longueur d'onde et g l'accélération de la pesanteur. La propagation de la houle est:

(a) dispersive **(b) non dispersive**

3- Un milieu permet la propagation d'ondes avec la relation suivante entre longueur d'onde et période: $\lambda = \alpha.T^2$

où α est une constante. Ce milieu est-il dispersif?

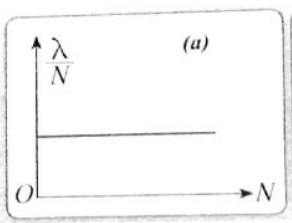
4- Un milieu permet la propagation d'ondes avec la relation suivante entre longueur d'onde et période: $\lambda = \alpha T$ où α est une constante. Ce milieu est-il dispersif?

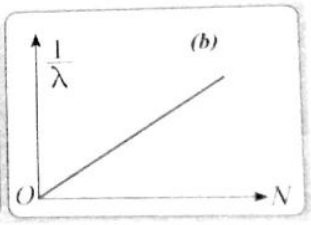
5- Pour diffracter une onde, il faut la faire passer par une ouverture plus

(a) petite **(b) grande**

que sa longueur d'onde.

6- Laquelle des deux figures suivantes correspond à un milieu dispersif?





Scanned with CamScanner

Solution

1- Diminue. En effet on a:
$\lambda = V.T = \frac{V}{N}$; ($V = cte$; si $N \nearrow \rightarrow \lambda \searrow$)

2- Dispersive. En effet la célérité des ondes dépend de leur longueur d'onde (et donc de leur fréquence).

3- Dispersif. En effet la célérité de ces ondes est: $V = \frac{\lambda}{T} = \frac{\alpha T^2}{T} = \alpha.T$ qui dépend de la période de l'onde.

4- Non dispersive. En effet la célérité de ces ondes est: $V = \frac{\lambda}{T} = \alpha = cte$ qui ne dépend pas de la période de l'onde.

5- Petite. Si l'ouverture est plus grande que la longueur d'onde, l'onde n'est pas diffractée.

6- **Pour la figure (a):** $\frac{\lambda}{N} = cte(\forall N)$;

donc: $\lambda = cte.N$

donc: $\lambda = \frac{V}{N} = cte.N$

d'où: $V = cte.N^2$

le milieu est donc dispersif car V varie lorsque N varie.

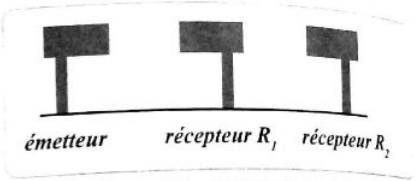
- Pour la figure (b): $\frac{1}{\lambda} = cte.N$

or $\lambda = \frac{V}{N}$, alors: $\frac{N}{V} = cte.N$

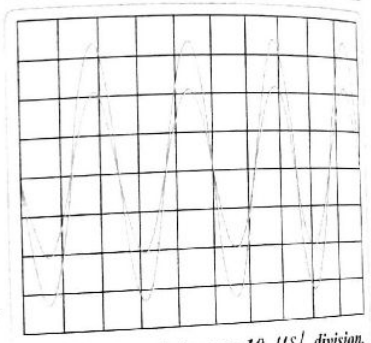
$\frac{1}{V} = cte$, V est constante.

Dans ce cas, le milieu est non dispersif.

9 Un émetteur ultrasonore et deux récepteurs R_1 et R_2 placés en M_1 et M_2 sont alignés. Les deux récepteurs sont reliés aux deux voies d'entrée 1 et 2 d'un oscillographe.



La plus petite distance M_1M_2 pour laquelle l'oscillogramme des tensions aux bornes des récepteurs à l'allure ci-contre vaut $8,5mm$


Echelle: base de temps: 10 μs/ division.

1.1- Identifier les deux oscillogrammes.

1.2- Quelle est la fréquence du signal ultrasonore?

1.3- Quelle est la valeur de sa longueur d'onde?

1.4- Calculer sa célérité.

2- Pour $M_1M_2 = 17mm$, puis $21,25mm$, représenter les oscillogrammes correspondants.

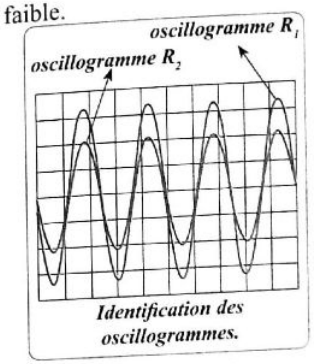
3- un télémètre, appareil permettant de mesurer une distance, comprend, entre autres, un émetteur d'ultrasons et un récepteur associé. Une horloge électronique intégrée au dispositif permet de déterminer la durée Δt nécessaire pour qu'un signal émis en direction d'un obstacle soit réfléchi par celui-ci, puis reçu par le récepteur.

3.1- Quelle relation existe-il entre d, distance émetteur-obstacle et Δt?

3.2- La plus petite variation de durée détectable vaut $0,10ms$. En déduire la plus petite variation de distance mesurable.

Solution

1.1- Le récepteur R_2 étant plus éloigné, il reçoit une puissance inférieure à celle reçue par R_1. L'amplitude de la tension aux bornes du récepteur R_2 est donc la plus faible.



Identification des oscillogrammes.

1.2- D'après la représentation graphique, la période vaut $2,5.10^{-5}s$. On en déduit la fréquence:

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,5.10^{-5}} = 40.10^3 Hz = 40kHz$

1.3- La distance $M_1M_2 = 8,5mm$ est la plus petite distance séparant deux points vibrant en phase: ils sont séparés par une longueur d'onde $\lambda = 8,5mm$.

1.4- $\lambda = \frac{V}{f}$, donc:

$V = \lambda.f = 8,5.10^{-3} \times 40.10^3$

$= 3,4.10^2 m.s^{-1}$

2- Deux points séparés par une distance de $17mm$ sont éloignés de 2λ. Ils vibrent en phase. L'oscillogramme est donc identique au premier.

Deux points séparés par une distance de $21,25mm$ sont éloignés de $\frac{5}{2}\lambda$.

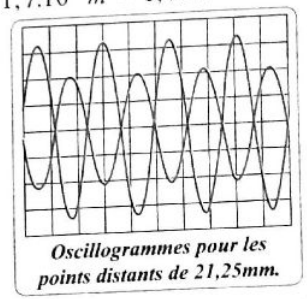
Ils vibrent en opposition de phase.

3.1- L'onde ultrasonore a parcouru la distance $2d$ au cours d'une durée Δt, d'où: $2d = V.\Delta t$

3.2- La plus petite variation de distance détectable vaut:

$d_m = \frac{V.\Delta t}{2} = \frac{3,4.10^2 \times 0,10.10^{-3}}{2}$

$= 1,7.10^{-2}m = 1,7cm$

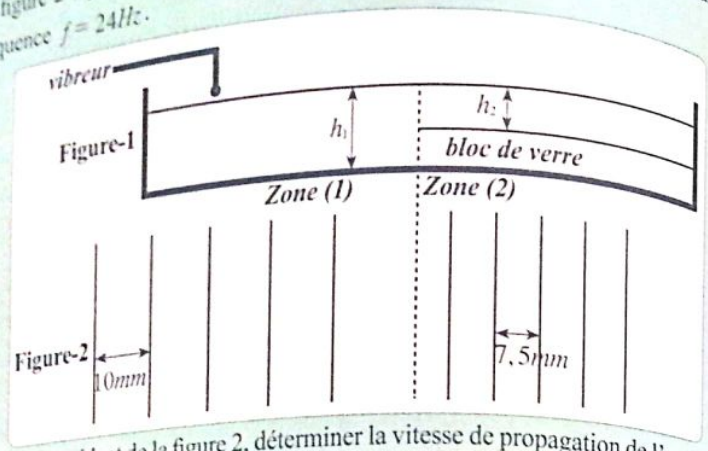

Oscillogrammes pour les points distants de 21,25mm.

10 A l'aide du montage de la cuve à ondes, on produit à la surface de l'eau; une onde sinusoïdale.

1- Dans une première expérience, on place au fond de la cuve remplie d'eau, un bloc de verre pour créer deux zones de propagation (fig-1).

Scanned with CamScanner

La figure 2 représente les lignes de crêtes à la surface de l'eau, obtenues pour une fréquence $f = 24Hz$.



1.1- En vous aidant de la figure 2, déterminer la vitesse de propagation de l'onde dans chacune des deux zones.

1.2- Quelle conclusion pouvez-vous tirer de cette expérience?

2- on retire le bloc de verre et on utilise maintenant un vibreur de fréquence variable. On mesure λ pour chaque valeur de la fréquence f.

$f(Hz)$	12	24	48
$\lambda(m)$	0,018	0,0097	0,0059

2.1- Calculer la célérité V de l'onde pour chacune de ces fréquences.

2.2- Que peut-on conclure de cette deuxième expérience?

Solution

1.1- $\lambda_1 = 10mm = 10^{-2}m$ et

$\lambda_2 = 7,5.10^{-3}m$

$V_1 = \frac{\lambda_1}{T} = \lambda_1 f = 10^{-2}.24 = 24cm/s$

$V_2 = \lambda_2 f = 7,5.10^{-3}.24 = 18cm/s$

1.2- La vitesse de propagation d'une onde à la surface de l'eau dépend de la profondeur de l'eau ($V \nearrow si\ f \nearrow$).

2.1-

$V_1 = \lambda_1 f_1 = 0,018.12 = 0,216m.s^{-1}$

$V_2 = \lambda_2 f_2 = 0,097.24 \simeq 0,233m.s^{-1}$

$V_3 = \lambda_3 f_3 = 0,0059.48 \simeq 0,283m.s^{-1}$

Dans un même milieu (l'eau); se trouvant dans les mêmes conditions (même profondeur); on constate que la vitesse de propagation varie avec la fréquence de l'onde, c'est le phénomène de dispersion.

2.2- La surface de l'eau; dans la cuve à ondes; est un milieu dispersif pour l'onde utilisée.

11 Les ondes ultrasonores sont des ondes mécaniques qui peuvent se propager dans les liquides avec une vitesse qui dépend de la nature du liquide et de la vitesse de son écoulement.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite.

1- Propagation d'une onde ultrasonore:

Une onde ultrasonore de fréquence $N = 50kHz$ se propage dans une eau calme avec une vitesse $v_0 = 1500ms^{-1}$.

1.1- Calculer la longueur d'onde λ de cette onde ultrasonore se propageant dans une eau calme.

1.2- La valeur de λ varie-t-elle si cette onde se propage dans l'air? Justifier la réponse.

2- Mesure de la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite:

Une onde ultrasonore se propage à la vitesse v dans une eau qui coule à la vitesse v_e dans une conduite telle que $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v_e}$ avec $\vec{v_0}$ vecteur vitesse de propagation de cette onde dans une eau calme.

Pour déterminer la vitesse v_e d'écoulement de l'eau dans une conduite horizontale, on y place un émetteur E et un récepteur R d'ondes ultrasonores.

L'émetteur E et le récepteur R sont situés sur la même droite horizontale et parallèle à la direction du mouvement de l'eau et sont séparés d'une distance $d = 1,0m$.

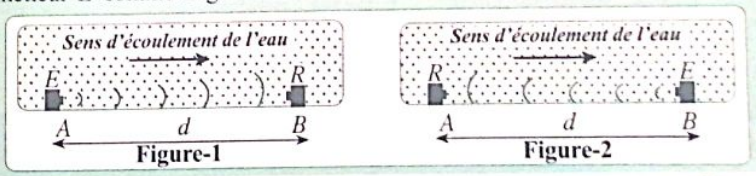
L'émetteur E émet une onde ultrasonore de faible durée qui est reçue par le récepteur R.

Un dispositif adéquat permet d'enregistrer le signal $u(t)$ reçu par le récepteur R.

On enregistre le signe $u(t)$ dans les deux cas suivants:

- **1er cas**: L'émetteur E est à la position A, et le récepteur R est à la position B figure (1).
- **2ème cas**: L'émetteur E est à la position B, et le récepteur R est à la position A figure (2).

On considère, pour chaque cas, l'instant de l'émission de l'onde ultrasonore par l'émetteur E comme origine des dates.



Scanned with CamScanner

La figure 3 représente les deux enregistrements obtenus (a) et (b).

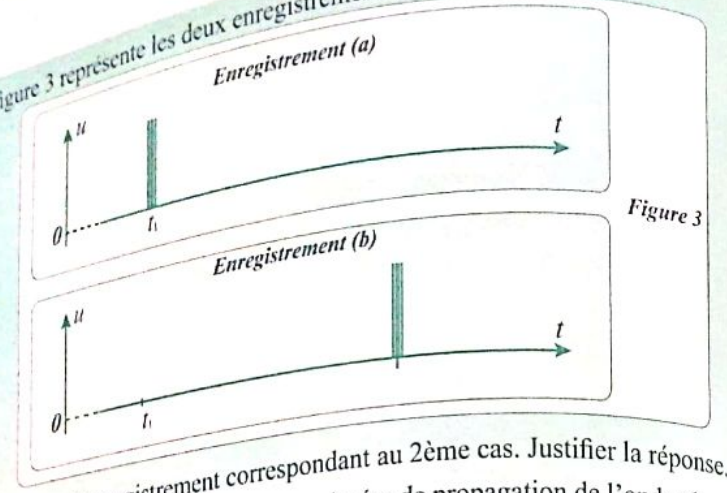


Figure 3

2.1- Indiquer l'enregistrement correspondant au 2ème cas. Justifier la réponse.

2.2- τ représente la différence des deux durées de propagation de l'onde ultrasonore de l'émetteur E au récepteur R dans les deux cas.

a- Déterminer l'expression de τ en fonction de v_e, v_0 et d.

b- En négligeant la vitesse v_e devant v_0, déterminer la vitesse v_e d'écoulement de l'eau dans la conduite sachant que $\tau = 2,0\mu s$.

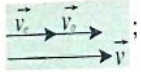
Solution

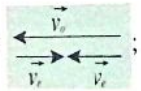
1.1- $\lambda = V_0.T = \frac{V_0}{N} = \frac{1500}{50} = 30m$

1.2- La longueur d'onde varie lorsque le milieu de propagation change, car la vitesse de l'onde varie avec le milieu.

2- Analysons la relation vectorielle:

$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{V_e}$.

1er cas:  ; $(v_1) = v_0 + v_e$

2ème cas:  ; $v_2 = v_0 - v_e$

On remarque $v_1 > v_2$ et la distance parcourue par l'onde dans les deux cas est la même.

donc: $t_1 = \frac{d}{v_1} < t_2 = \frac{d}{v_2}$

• Le 2ème cas lui correspond la figure (b).

2.2-a-

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1}$$

$$\tau = d\left(\frac{1}{v_0 - v_e} - \frac{1}{v_0 + v_e}\right) = \frac{2v_e.d}{v_0^2 - v_e^2}$$

2.2-b- $v_0^2 - v_e^2 \simeq v_0^2$

$$\tau = \frac{2v_e.d}{v_0^2} \; ;$$

$$v_e = \frac{\tau.v_0^2}{2.d}$$

$$v_e = \frac{2.10^{-6}.(1500)^2}{2.1} = 2,25m.s^{-1}$$

12 Une source E d'ultrasons émet une onde progressive sinusoïdale qui se propage dans un tube plein d'eau où sont placés deux récepteurs R_1 et R_2, dans la même direction contenant l'émetteur E (figure 1).

Les signaux captés par E sont visualisés sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe réglé sur la sensibilité horizontale $5\mu S/div$.

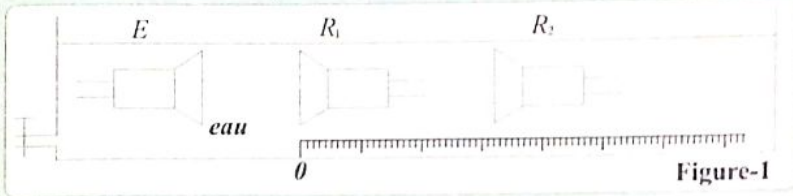


Figure-1

1- Au début, R_1 et R_2 sont placés au niveau de la graduation 0 sur une règle graduée, à ce moment; les deux courbes visualisées sont en phase.

- On éloigne R_1 et R_2 suivant la direction de la règle graduée, le signal capté par R_2 se déplace à droite, et les deux courbes deviennent à nouveau en phase lorsque $d = 3cm$ (figure 2).

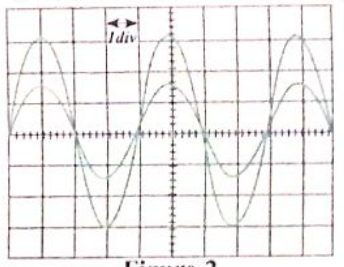


Figure-2

1.1- Donner la définition de la longueur d'onde λ.

1.2- Ecrire la relation liant λ; la fréquence N de l'onde ultrasonore et sa célérité v.

1.3- Déduire de cette expérience la célérité V_e de l'onde ultrasonore dans l'eau.

2- Propagation de l'onde ultrasonore dans l'air:

On garde le montage précédent, avec R_1 et R_2 aux mêmes positions $(d = 3cm)$, et on fait évacuer l'eau du bassin.

On observe que les deux signaux captés par R_1 et R_2 sont décalés l'un par rapport à l'autre.

2.1- Commenter cette observation.

2.2- De quelle distance minimale doit-on éloigner R_1 et R_2 pour que les deux signaux deviennent en phase?

On donne: vitesse de propagation des ultrasons dans l'air: $V_a = 340m.s^{-1}$.

Solution

1.1- La longueur d'onde est la distance minimale entre deux points ayant le même état vibratoire.

Autre définition:
La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période

Scanned with CamScanner

temporelle T de l'onde.

1.2- $\lambda = V.T = \frac{V}{N}$

1.3- Appliquons la condition de concordance de phase: $d = k\lambda$.

- Lorsque $d = 0$ on a $k = 0$.

- Lorsque $d = 3cm$, $d = k\lambda$ avec $k = 1$

donc: $\lambda = d = 3cm$

$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{3.10^{-2}}{4,5.10^{-6}} = 1500m.s^{-1}$

2.1- Considérons la condition $d = k\lambda$, qu'on peut aussi écrire: $d = \frac{k.V.T}{N}$.

En passant de l'eau à l'air, la vitesse de l'onde change de valeur, le décalage observé pour les deux signaux est dû au fait que la condition $d = k\lambda_a$ n'est pas remplie, lorsque $d = 3cm$.

2.2- La distance d' qui permet d'avoir une concordance de phase dans l'air est telle que: $d' = k\lambda_a \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

or: $d' > d$, alors: $k\lambda_a > d$

$k > \frac{d}{\lambda_a} = \frac{d}{V_a.T} = \frac{3.10^{-2}}{340.2.10^{-5}} = 4,4$.

La plus petite valeur de k vérifiant cette condition est: $k_{min} = 5$.

On déduit que:

$d'_{min} = k_{min}.\lambda_a = 5\lambda_a = 5.340.2.10^{-5}$

$= 3,4cm$

R_1 et R_2 étaient distants de $3cm$, il fallait donc déplacer R_2 de $0,4cm$.

13 Une onde progressive sinusoïdale de fréquence $15,0Hz$, se propage à partir d'un point S de la surface de l'eau contenue dans une cuve. L'amplitude du mouvement de S est de $5,0mm$.

Un point M de la surface de l'eau, situé à $2,5cm$ du point S vibre en opposition de phase avec le point S.

Quelle est la valeur de la célérité V de l'onde si elle est comprise entre $20cm.s^{-1}$ et $30cm.s^{-1}$?

Solution

1-Les points M et S vibrent en opposition de phases, alors:

$d = SM = (2k+1)\frac{\lambda}{2}; k \in \mathbb{N}$.

Or $\lambda = \frac{V}{N}$ d'où: $d = (2k+1)\frac{V}{2N}$;

On déduit que: $V = \frac{2Nd}{(2k+1)}$

D'après l'énoncé, V se trouve entre V_1 et V_2.

par suite: $V \leq \frac{2Nd}{(2k+1)} \leq V_2$

ou encore: $\frac{1}{V_2} \leq \frac{(2k+1)}{2Nd} \leq \frac{1}{V_1}$

$\frac{2Nd}{V_2} - 1 \leq 2k \leq \frac{2Nd}{V_1} - 1$

$\frac{Nd}{V_2} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{Nd}{V_1} - \frac{1}{2}$

$\frac{15,2,5.10^{-2}}{30.10^{-2}} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{15,2,5.10^{-2}}{20.10^{-2}} - \frac{1}{2}$

$0,25 \leq k \leq 1,375; k \in \mathbb{N}$

donc: $k = 1$

La relation (1) fournit:

$V = \frac{2N.d}{3} = 25cm.s^{-1}$

14 Un haut-parleur alimenté par un générateur de basse fréquence (GBF) émet une onde sonore de fréquence f.

Cette onde est visualisée sur la voie Y_A d'un oscilloscope figure (2).

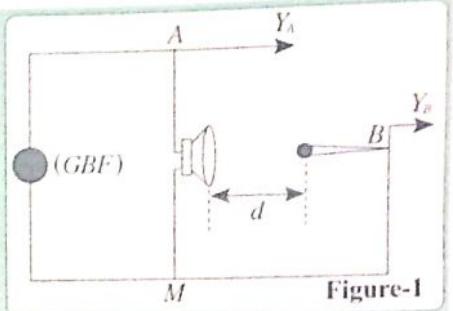


Figure-1

On place à une distance d du haut-parleur un microphone qu'on relie avec la voie Y_B de l'oscilloscope.

- Balayage horizontal: $96\mu s$ par division.

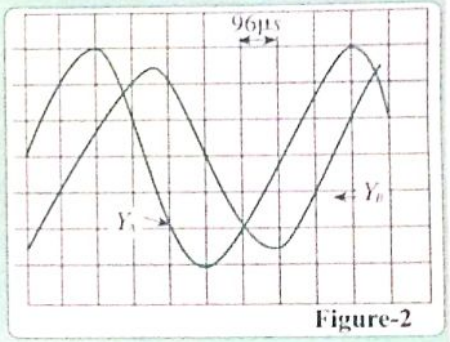


Figure-2

1- Déterminer la fréquence f de l'onde sonore.

2- Déterminer la valeur du décalage horaire τ entre les deux signaux.

3- Exprimer la durée Δt que met l'onde pour parcourir la distance d, en fonction de τ, f et k. k étant un nombre entier.

4- On éloigne le microphone de la source jusqu'à ce que les deux courbes deviennent en phase, le microphone est alors à la distance d_1 du haut-parleur. Cette position est notée (1).

On éloigne encore le microphone jusqu'à l'obtention d'une nouvelle concordance de phases, on note que le microphone se trouve à la distance $\Delta d = 23cm$ de sa position (1).

4.1- Déterminer la célérité V du son dans l'air.

4.2- Sachant que la distance d figurant aux début de l'exercice est comprise entre $40cm$ et $60cm$; déterminer la valeur de cette distance.

Solution

1- $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7,96.10^{-6}} = 1488Hz$.

2- $\tau = 1,5div = 144.10^{-6} = 1,44.10^{-4}s$

3- Si les deux courbes étaient en phase, on aurait dû écrire: $\frac{d}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T} = k$

Dans ce cas le décalage entre deux maxima voisins de ces deux courbes est nul.

Dans notre cas: $\Delta t = kT + \tau$.

4.1- Les deux concordances de phases obtenues à d_1 et d_2 sont successives;

Scanned with CamScanner

Donc: $d_1 = k_1\lambda$ et $d_2 = k_2\lambda = (k_1+1)\lambda$

$d_2 - d_1 = k_2\lambda + \lambda - k_1\lambda = \lambda$

$\lambda = d_2 - d_1 = 23cm$

$V = \lambda f = 23.10^{-2}.1488 = 342m.s^{-1}$

4.2- $d = V.\Delta t = V(kT+\tau)$

$k = \frac{d}{VT} - \frac{\tau}{T} = \frac{d.f}{V} - \frac{\tau}{T}$

$40cm \le d \le d_{max} = 60cm$

$d_{min} \le V(kT+\tau) \le d_{max}$

$\frac{d_{min}}{V} - \tau \le kT \le \frac{d_{max}}{V} - \tau$

$\left(\frac{d_{min}}{V} - \tau\right)f \le k \le \left(\frac{d_{max}}{V} - \tau\right)f$

$\left(\frac{40.10^{-2}}{342} - 1,44.10^{-4}\right).1488 \le k \le \left(\frac{60.10^{-2}}{342} - 1,44.10^{-4}\right).1488$

$1,526 \le k \le 2,39 ; k \in \mathbb{N}$

On déduit que: $k = 2$

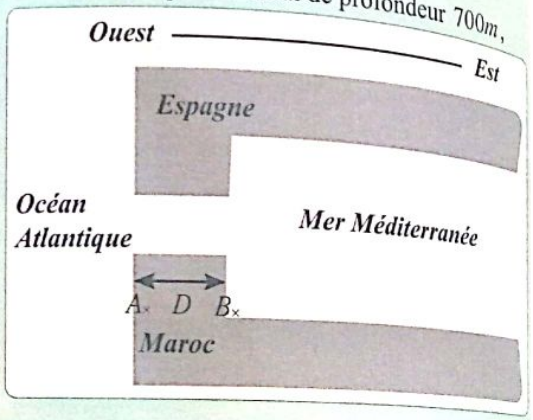
La relation précédente donne: $d = V(2T+\tau)$

$d = 342.\left(2.\frac{1}{1488} + 1,44.10^{-4}\right)$

$= 50,89cm$

15 Les marées dans le détroit de Gibraltar:

On modélise la région du détroit de Gibraltar par un canal de profondeur $700m$, de largeur $L = 10km$ et de longueur $D = 50km$ qui débouche sur la mer Méditerranée. La houle est assimilée à une onde progressive sinusoïdale arrivant de l'ouest. On considère, dans un premier temps, le cas où la profondeur h est bien supérieure à la longueur d'onde λ de la houle.



La célérité est alors égale à $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ où $g = 9,81m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

1- Quelle est la nature physique de la perturbation qui se propage?

2- Justifier, par analyse dimensionnelle, que la quantité $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ a bien les dimensions d'une célérité.

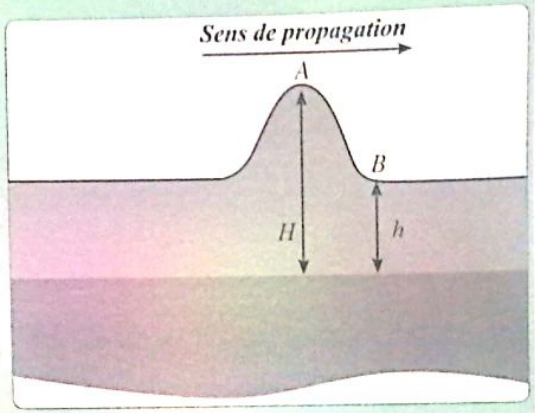
3- Le milieu de propagation est-il dispersif?

4- Calculer la célérité d'une houle de longueur d'onde $\lambda = 50m$. En déduire le délai qui s'écoule entre le passage d'une vague au point A à l'entrée du détroit et son passage au point B à la sortie.

5- On considère maintenant le cas où $\lambda \gg h$: la célérité de l'onde est alors égale à $v = \sqrt{gh}$.

Le milieu de propagation est-il alors dispersif?

6- On considère la «vague» représentée ci-contre.



Donner l'expression de la célérité de l'onde au point A en fonction de g et h.

En quel point la célérité est-elle la plus grande?

En déduire que cette vague se déforme au cours de sa propagation.

Représenter sur un schéma la forme ultérieure de la vague. A quel phénomène aboutit finalement cette déformation? Peut-on considérer qu'une telle vague constitue une onde progressive?

7- Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde d'une houle qui serait diffractée à sa sortie du détroit de Gibraltar. Quelle est la valeur correspondante de la célérité? Utiliser la formule adéquate en fonction de la valeur de la longueur d'onde trouvée.

Solution

1- La perturbation qui se propage est la différence de hauteur de la surface libre de l'océan par rapport à l'état de repos où elle est horizontale.

2- On a:

- $[g] = L.T^{-2}$ car g est accélération;
- $[\lambda] = L$;
- La constante 2π est sans dimension; sachant que L désigne la dimension longueur et T la dimension temps.

D'où: $\left[\frac{g\lambda}{2\pi}\right] = L^2.T^{-2}$

On conclut que $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ est homogène au rapport d'une longueur et d'un temps, c'est-à-dire à une vitesse, comme la

Scanned with CamScanner

célérité de l'onde étudiée.

3- La célérité dépend de la longueur d'onde: le milieu de propagation est donc dispersif.

4- Pour $\lambda = 50m$, on trouve: $v = 8,8m.s^{-1}$, soit $v = 32km.h^{-1}$.

Une vague parcourt la longueur: $D = 50km$ du détroit en une durée égale à $\frac{50}{32}h$ soit approximativement $1h30\,\text{min}$.

5- Dans ce second cas, la célérité ne dépend pas de la longueur d'onde: le milieu n'est pas dispersif.

6- Au point A, la célérité de l'onde vaut: $v_A = \sqrt{gH}$.

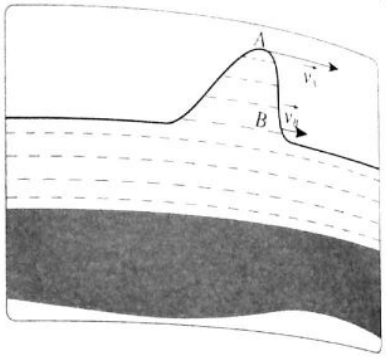
Au point B, elle vaut $v_B = \sqrt{gh}$.

Comme $H > h$, on a: $v_A > v_B$.

Le sommet de la vague se déplace donc plus vite que la base: le front avant de la vague a tendance à se raidir comme l'indique la figure.

Une telle onde qui se déforme en se propageant n'est pas une onde progressive. Lorsque le front avant de la vague devient trop raide, elle déferle.

7- Une houle qui serait diffractée à sa sortie du détroit, serait telle que $\lambda \approx l$, soit $\lambda \approx 10km$.



Comme cette longueur d'onde est bien supérieure à la profondeur h du canal, on doit utiliser la formule $v = \sqrt{gh}$.

Avec $h = 700m$, on trouve une célérité de l'onde $v = 83m.s^{-1}$, soit quasiment $300km.h^{-1}$.

16 On s'intéresse dans cet exercice aux tsunamis, du japonais tsu, port, et nami, vague (grande vague dans le port, ou raz-de-marée). Les tsunamis sont des vagues extrêmement destructrices créées, par exemple, par des séismes sous-marins. Ces vagues se propageant à la surface de l'océan et arrivant aux côtes où elles peuvent occasionner des dommages considérables.

Données:

Les tsunamis se produisant essentiellement dans l'océan pacifique, on supposera qu'en plein océan la profondeur est uniforme et vaut $d = 10km$.

Accélération de la pesanteur: $g = 10m.s^{-2}$.

On admettra que la célérité de la houle est donnée par les formules suivantes:

Dans le cas peu profond où la profondeur d est inférieure à la longueur d'onde: $V = \sqrt{gd}$

Dans le cas profond où la profondeur d est supérieure à la longueur d'onde λ, on a: $V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

1- Des observateurs rapportent que lors du passage d'un tsunami, on vit déferler 7 énormes vagues, et que deux vagues successives étaient séparées par un intervalle de 20 minutes. Quelles est la fréquence de l'onde de houle associée au tsunami?

2- Quelle est la célérité d'un tsunami en plein océan? Quelle est la longueur d'onde en plein océan?

3- On admettra que la quantité $V.H^2$ est conservée lorsque le tsunami se propage, où v est sa célérité et H la hauteur de la houle. Si la hauteur d'un tsunami en plein océan est 1m, quelle est la hauteur de la déferlante sur des côtes peu profondes, où la profondeur moyenne de l'eau est de 4m?

4- Un tsunami est-il détectable en plein océan?

5- Un tsunami arrive du sud entre les deux îles A et B représentées ci-dessous. On supposera que la profondeur de l'océan entre ces îles est la même qu'en plein océan. Y-a-t-il risque de raz-de-marée dans le port V de l'île C? On justifiera soigneusement.

Solution

1- La fréquence de la houle associée aux tsunamis est simplement celle mentionnée par les observateurs, soit 1 vague pour 20 minutes, ou encore:

$$N = \frac{1}{20 \times 60} \approx 8,3.10^{-4}Hz$$

2- Pour déterminer la célérité et longueur d'onde d'un tsunami en plein océan, il faut savoir s'il faut se placer dans le cas profond ou dans le cas peu profond. On va donc supposer successivement chaque cas, puis on verra si la longueur d'onde obtenue vérifie la supposition.

(a) On suppose que l'on est dans le cas profond. Alors la célérité s'écrit:

$$V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

donc, on peut écrire:

$$\lambda = \frac{V}{N} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

ce qui donne: $\lambda^2 = \frac{1}{N^2}\frac{g\lambda}{2\pi}$

d'où l'on déduit: $\lambda = \frac{g}{2\pi N^2}$

L'application numérique donne:

Scanned with CamScanner

$$\lambda = \frac{10}{2\pi \times (8,3\,10^{-4})^2} \approx 2,3\,10^6 m$$

On voit que l'on aboutit à une contradiction, puisque cette longueur d'onde est plus grande que la profondeur de l'océan, donc on ne peut pas être dans le régime profond.

(b) On suppose à présent que l'on est dans le cas peu profond. Alors la célérité s'écrit:

$$V = \sqrt{gd}$$

et donc: $\lambda = \frac{V}{N} = \frac{\sqrt{gd}}{N}$

L'application numérique donne:

$$\lambda = \frac{\sqrt{10 \times 10^4}}{8,3\,10^{-4}} \approx 3,8.10^7 m \approx 380km$$

Cette longueur d'onde est bien supérieure à la profondeur de l'océan donc l'hypothèse est vérifiée et l'on est bien dans le cas profond.

$$V = \sqrt{g.d} = \sqrt{10 \times 10^4} \approx 320m.s^{-1}$$
$$\approx 1140km.h^{-1}$$

Les tsunamis ont donc une très grande longueur d'onde et se propagent à une très grande célérité.

3- On écrit que $\sqrt{H}$ se conserve, donc:

$$V_{océan} H'_{océan} = V_{côte} H_{côte}$$

On connait $V_{océan}$, $H_{océan}$, et on veut déterminer $H_{côte}$, donc il faut au préalable calculer $V_{côte}$. On l'obtient par:

$$V_{côte} = \sqrt{gd} = \sqrt{10 \times 4}$$
$$= 6,3m.s^{-1}$$

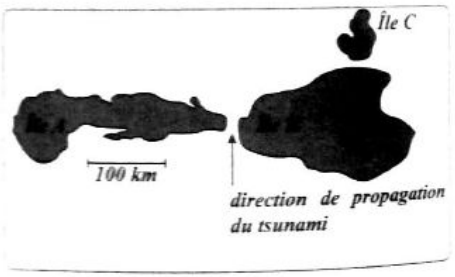
donc:

$$H_{côte} = H_{océan} \sqrt{\frac{V_{océan}}{V_{côte}}}$$
$$= 1 \times \sqrt{\frac{320}{6,3}} \approx 7,1m$$

En fait la hauteur du tsunami lorsqu'il déferle dépend considérablement du profil de la côte, de l'endroit de déferlement, etc, et ce calcul simple ne peut donner au mieux qu'un ordre de grandeur de la hauteur de la vague. Certains tsunamis ont atteint des hauteurs de 30 mètres.

4- un tsunami est indétectable en plein océan, puisqu'il correspond à un soulèvement peu important de la surface sur une très grande distance. En particulier les bateaux ne peuvent pas détecter la présence d'un tsunami qui se propage à la surface.

5- La longueur d'onde du tsunami est bien supérieure à la taille de l'«ouverture» entre les deux îles, donc le tsunami est diffracté et va se propager dans toutes les directions après être passé entre les deux îles: il va donc menacer, entre autres, le port de l'île C.



17 Pour étudier la propagation des bips sonores émis par une source S à des intervalles de temps égaux fig (1), on utilise un microphone relié à un oscilloscope à mémoire et on obtient la courbe (1).

1- Relever du texte ce qui signifie que le phénomène à étudier est périodique, puis déterminer la période T des émissions des bips.

2- Le microphone est maintenant placé entre la source S et un obstacle situé à une distance $d = 0,85m$ du microphone fig (2).

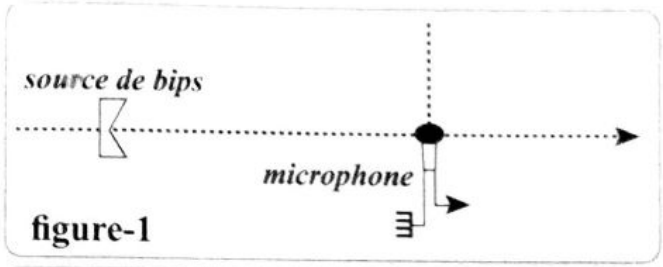


figure-1

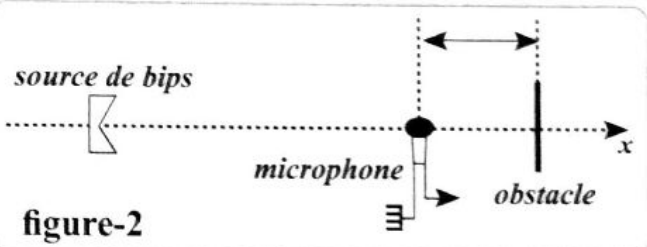


figure-2

Dans ce cas, l'oscilloscope à mémoire enregistre la courbe (2).

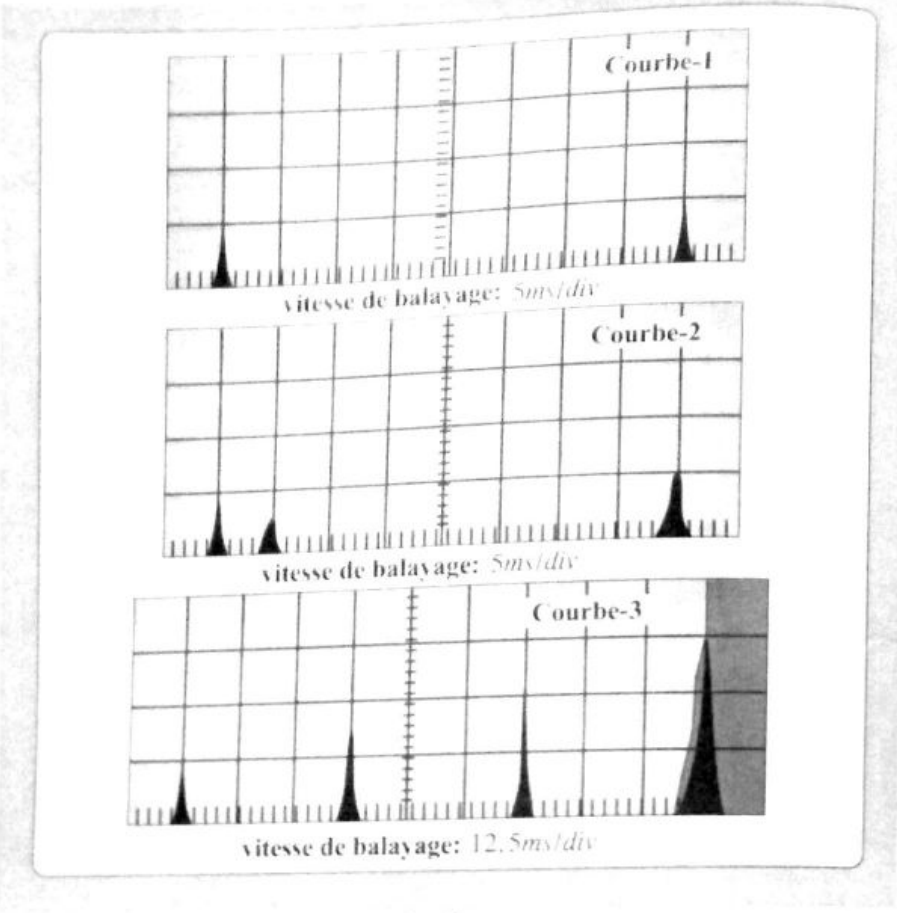
Quelle est la vitesse de propagation des bips sonores dans l'air?

3- On enlève l'obstacle puis on assujettit la source des bips à une mouvement rectiligne uniforme dont la trajectoire est portée par l'axe $x'x$, on enregistre cette fois-ci la courbe (3).

3.1- Quel est le sens du mouvement de la source? Justifier votre réponse.

3.2- Déterminer la vitesse du mouvement de la source.

Scanned with CamScanner



Solution

1- Dépres la premiere phase du texte, les bips sont émis de maniére réguliére, la durée séparant deux bips voisins représente la période T de l'onde sonore.

$T = 8div.5ms/div$

$= 40ms = 4.10^{-2}s$

2- Le bip situé a gauche de la figure 2, enregistré a la date t, représente le 1er premier bip reçu par le microphone.

Le bip se trouvant à côté représente l'écho du 1er; enregistré à t_2 ; après réflexion sur l'obstacle.

Entre ces deux instants, Le bip a parcouru dans l'air; la distance $2d$:

$2d = V_a(t_2 - t_1) = V.\tau$,

d'ou: $V_a = \frac{2d}{\tau} = \frac{2.0,85}{1,5.10^{-2}}$

$= 340m.s^{-1}$

3.1- On constate que l'amplitude des bips sonores captés par le microphone augmentent avec le temps, cela veut dire que la source s'approche de plus en plus du microphone (fixe), donc la source se déplace vers la droite sur le schéma.

3.2- Considérons deux signaux (1) et (2) successifs émis respectivement par la source aux dates t_1 et $t_2 = t_1 + T$.

Entre ces deux instants, la source passe de la position S_1 à la position S_2 ; telles que:

$S_1S_2 = v.T$ (v: vitesse de la source)

- Le signal (1) par le microphone M à la date t'_1 parcourt la distance S_1M :

$S_1M = V_a(t'_1 - t_1)$

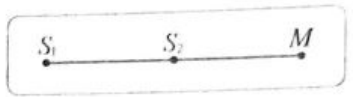
- Le signal (2) émis à t_2 et capté par M à la date t'_2 parcourt la distance S_2M :

$S_2M = V_a(t'_2 - t_2)$

Notons la durée $(t'_2 - t'_1)$ est donnée par la courbe (3), on la note τ.

On peut écrire:

$S_1M - S_2M = S_1S_2$;



C'est-à-dire:

$V_a(t'_1 - t_1) - V_a(t'_2 - t_2) = v.T$

$V_a[(t_2 - t_1) - (t'_2 - t'_1)] = v.T$

$V_a[T - \tau] = v.T$

$v = V_a\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)$

$v = 340\left(1 - \frac{3.12,5.10^{-3}}{4.10^{-2}}\right)$

$= 21,25m.s^{-1}$

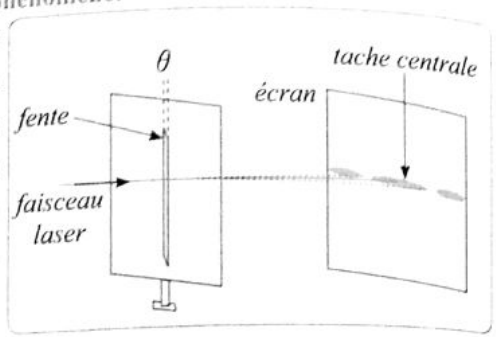
Scanned with CamScanner

3 LES ONDES LUMINEUSES

I- Diffraction d'une lumière monochromatique par une fente:

1 Réalisation expérimentale du phénomène:

- Considérons une source laser produisant un mince faisceau de lumière monochromatique. Lorsque ce faisceau passe à travers une fente de largeur a de l'ordre de $\frac{1}{10}mm$, on observe un changement de direction du faisceau incident:



C'est le phénomène de diffraction.

- Sur l'écran parallèle au plan contenant la fente on obtient la figure de diffraction.
- La même figure est obtenue en remplaçant la fente par un cheveu ou un fil très fin.
- Cette figure est constituée d'une tache centrale, bordée.

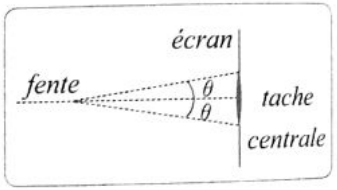
de taches lumineuses plus petites appelées taches secondaires.

- La direction des taches de diffraction est perpendiculaire à celle de la fente ou du fil.

2 Analyse du phénomène:

2.1- Formule de diffraction:

On montre que l'écart angulaire θ correspondant à la tache centrale est liée à a et λ par la relation :



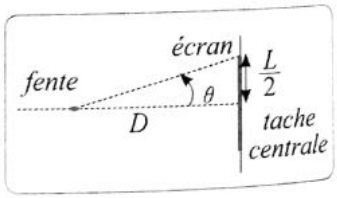
$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

θ : angle en radian

λ : longueur d'onde de lumineuse en m

a : largeur de la fente ou diamètre du fil en m

L'écart angulaire θ est d'autant plus grand que la largeur a de la fente est petite.



2.2- Expression de la largeur de la tache centrale:

L'analyse géométrique de la figure de diffraction donne:

$$\tan\theta = \frac{L}{2D}$$

L'angle θ est très petit, on utilise la formule d'approximation: $\tan\theta \simeq \theta$;

alors: $\theta = \frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{a}$

d'où : $L = \frac{2D.\lambda}{a}$

3 Conclusion: aspect ondulatoire de la lumière:

La diffraction est un phénomène caractéristique des ondes, la réalisation de ce phénomène à l'aide de lumière prouve que la lumière est une onde.

II- Propriétés des ondes lumineuses:

1 Définition d'une onde lumineuse monochromatique:

Une onde lumineuse appelée radiation lumineuse est une onde périodique caractérisée par sa fréquence et sa couleur, imposés par la source.

2 Milieu de propagation:

2.1- Dans le vide:

Contrairement aux ondes sonores, les ondes lumineuses sont des ondes électromagnétiques qui peuvent se propager dans le vide.

Dans le vide, toutes les radiations lumineuses se propagent à la même célérité notée C.

On utilise généralement sa valeur approchée : $C = 3,00.10^8 m.s^{-1}$.

2.2- Propagation dans les milieux transparents:

- Dans un milieu transparent, la lumière se propage avec une vitesse V plus faible que sa vitesse C dans le vide.
- Un milieu transparent est caractérisé par son indice de réfraction n défini par:

$$n = \frac{C}{V} \geq 1$$

Exemples : $n_{vide} = 1$, $n_{air} \approx 1$.

2 Longueur d'onde:

3.1- Dans le vide:

Dans le vide une radiation monochromatique de fréquence υ a pour longueur d'onde:

$$\lambda_0 = C.T = \frac{C}{\upsilon}$$

3.2- Dans un milieu transparent:

Dans un milieu transparent d'indice n; la longueur d'onde de cette radiation devient:

Scanned with CamScanner

$$\lambda = V.T = \frac{V}{\upsilon}$$

On a $V = \frac{C}{n}$, donc $\lambda = \frac{C}{n}\cdot\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{n}\frac{C}{\upsilon}$

dans un milieu d'indice n $\longrightarrow$ $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ $\longleftarrow$ dans le vide

3.3- Remarques:

- La longueur d'onde λ d'une lumière monochromatique dans un milieu dépend de la fréquence de cette lumière (c'est-à-dire de sa couleur) et de aussi de ce milieu.

- Par contre la longueur d'onde dans le vide ne dépend que de la source. On l'utilise généralement pour identifier cette radiation lumineuse.

3.4- Exemple:

Calculons la longueur d'onde dans le vide des deux radiations suivantes :

- une radiation rouge de fréquence $\upsilon_R = 3,75.10^{14} Hz$;

- une radiation bleu de fréquence $\upsilon_B = 7,5.10^{14} Hz$.

$$\lambda_R = \frac{C}{\upsilon_R} = \frac{3.10^8}{3,75.10^{14}} = 0,8.10^{-6} m = 0,8\mu m$$

$$\lambda_B = \frac{C}{\upsilon_B} = \frac{3.10^8}{7,5.10^{14}} = 0,4\mu m$$

4- Lumière et couleur:

- Une onde lumineuse monochromatique possède une couleur déterminée par sa fréquence (ou sa longueur d'onde λ_0 dans le vide ou l'air $n_a \simeq 1$)

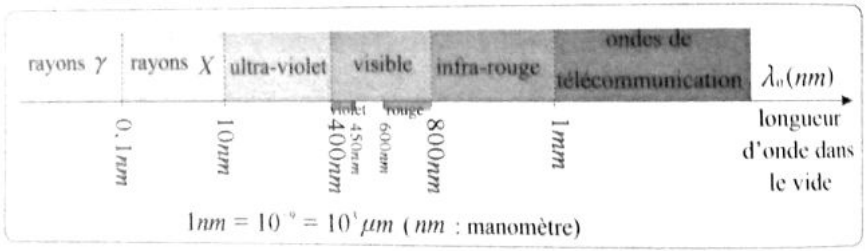
- Un faisceau lumineux est dit monochromatique lorsqu'il est formé de radiations lumineuses qui ont toutes la même fréquence.

- Un faisceau de lumière est dit polychromatique lorsqu'il est formé de radiations lumineuses de fréquences différentes.

- La lumière blanche est une lumière polychromatique.

5- Spectre de la lumière visible:

La lumière visible $(0,4\mu m \leq \lambda \leq 0,8\mu m)$, dans le vide ne représente qu'une partie infime de l'ensemble du spectre électromagnétique.



$1nm = 10^{-9} = 10^{-3}\mu m$ (nm : manomètre)

III- Dispersion de la lumière:

1 Dispersion de la lumière par un prisme:

1.1- Cheminement d'un rayon lumineux à travers un prisme :

En traversant un prisme, un rayon lumineux subit deux réfractions successives, et se trouve dévié en émergeant du prisme; d'un angle D (fig 1).

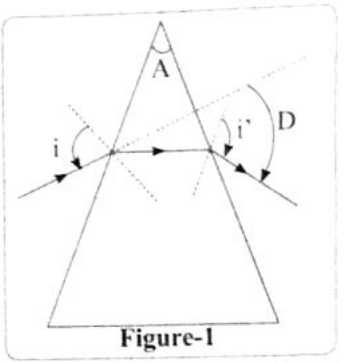


Figure-1

1.2- Cheminement d'un faisceau de lumière:

1.2.1- Cas d'un faisceau monochromatique (fig 2).

Formules du prisme:

$$\sin i = n.\sin r$$

$$\sin i' = n.\sin r'$$

$$r + r' = A$$

$$D = i + i' - A$$

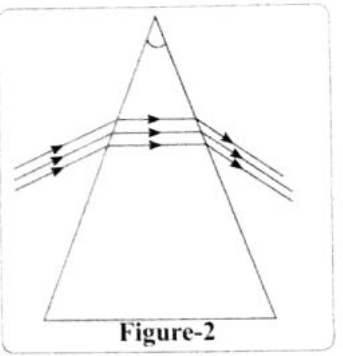


Figure-2

1.2.2- Cas d'un faisceau de lumière blanche.

2 Observations:

- Une lumière monochromatique n'est pas décomposable, elle est caractérisée pour sa fréquence.

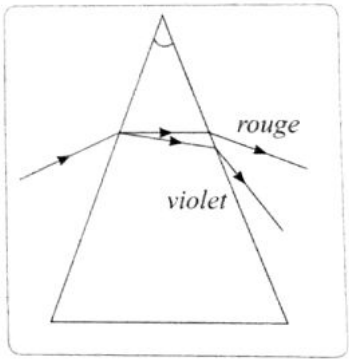
- Une lumière polychromatique (lumière blanche par exemple) se décompose en émergeant du prisme en ses différentes radiations.

- Le rouge est la radiation la moins déviée et la radiation violette est la plus déviée par le prisme.

1.4- Interprétation qualitative:

Les radiations d'une lumière composée n'étant pas déviées du même angle. Le verre du prisme ne se comporte pas de la même façon vis-à-vis de ces radiations, nous en déduisons que l'indice de réfraction du verre n'est pas le même pour toutes les radiations.

Or, l'indice de réfraction est lié à la célérité de la lumière. Il s'ensuit que la célérité de la lumière dans le prisme n'est pas la même pour les radiations d'une



Scanned with CamScanner

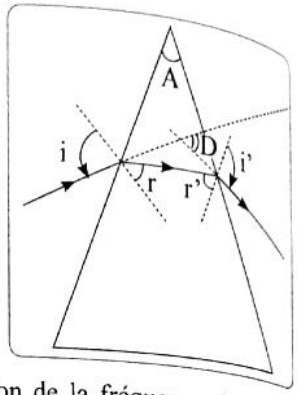
lumière polychromatique.

Donc le prisme est un milieu dispersif.

Remarque:

On notera que le mot «dispersif» trouve son origine dans cette expérience: les différentes radiations sont dispersées par le prisme.

2- Dispersion de la lumière: conclusions



- Une lumière monochromatique est déterminée par sa fréquence (ou sa longueur d'onde dans le vide)
- Une lumière polychromatique est la superposition d'un nombre fini ou infini de radiations monochromatiques.
- Un milieu transparent est dispersif si la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu dépend de la fréquence de l'onde lumineuse, c'est-à-dire de sa longueur d'onde dans le vide.
- L'indice optique d'un milieu dispersif est en fonction de la fréquence de l'onde lumineuse.

$$n(\upsilon) = \frac{C}{V(\upsilon)}$$

- Dans un milieu transparent dispersif, les radiations d'une lumière polychromatique ne se propagent pas de la même façon.
- Un milieu transparent dispersif permet la séparation d'une lumière pohychromatique en ses composantes.

Exercices

1 Une radiation émise par une lampe à vapeur de sodium de propage dans l'air (indice de réfraction égal à 1) puis pénètre dans l'eau (indice de réfraction égal à 1,33). La fréquence de cette radiation est égale à $f = 5,09.10^{14} Hz$.

On rappelle que la célérité de la lumière dans le vide est égale à $c = 3.10^8 m.s^{-1}$.

a- Calculer la longueur d'onde λ_1 de cette radiation dans l'air.

b- Calculer la célérité de la lumière dans l'eau.

c- En déduire la longueur d'onde λ_2 de cette radiation dans l'eau.

d- Calculer la variation relative de longueur d'onde lors du passage de l'air à l'eau.

Solution

L'indice de réfraction $n = \frac{C}{V}$ permet de calculer la célérité d'une onde dans un milieu d'indice de réfraction n. D'autre part, la fréquence f de l'onde ou sa longueur d'onde λ se calculent avec $\lambda = \frac{nV}{f}$. Rappelons que la fréquence d'une radiation monochromatique ne change pas lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre.

a- On peut confondre la célérité de la lumière dans l'air et dans le vide, donc:

$\lambda_1 = \frac{C}{f} = 589nm$

b- Dans l'eau d'indice de réfraction 1,33, la célérité de la lumière est :

$V = \frac{C}{n} = \frac{3.10^8}{1,33}$ soit $V = 2,26.10^8 m.s^{-1}$

c- La fréquence de cette radiation monochromatique est la même dans l'air et dans l'eau d'où :

$\lambda_2 = \frac{V}{f} = 443nm$

d- La variation relative de longueur d'onde est:

$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} = 24,8\%$

2 Un faisceau laser rouge franchit une fente de largeur a variable puis éclaire un écran.

On représente l'éclairement de l'écran pour les trois valeurs a_1, a_2 et a_3 de la largeur:

a- Quel phénomène observe-t-on? Classer les trois largeurs a_1, a_2 et a_3 par ordre croissant.

b- Que devient la deuxième figure si l'on éclaire la fente avec une lumière bleue? On rappelle que $\lambda_{bleu} < \lambda_{rouge}$.

Scanned with CamScanner

Solution

a- Dans les cas 1 et 2, on observe un phénomène de diffraction.

Le phénomène de diffraction est d'autant plus marqué que les dimensions de la fente ou de l'obstacle sont petites. La largeur angulaire de la tache centrale de la figure de diffraction observée est donnée par $\theta = \frac{\lambda}{a}$.

Ce phénomène est plus important dans le cas 2, la largeur de la fente est donc la plus petite.

Dans le cas 3, on n'observe pas de diffraction: la largeur de la fente est trop grande.

On peut alors classer les trois cas par valeurs croissantes de a, soit : $a_2 < a_1 < a_3$.

b- D'après la formule $\theta = \frac{\lambda}{a}$, la largeur de la tache centrale diminue quand la longueur d'onde λ diminue. Puisque $\lambda_{bleu} < \lambda_{rouge}$, le phénomène de diffraction sera moins important avec une lumière bleue; les taches seront moins larges.

3 On réalise une expérience de diffraction de la lumière émise par un laser, de longueur d'onde $\lambda = 633nm$, à l'aide d'une fente verticale de largeur $a = 100\mu m$. On observe la figure de diffraction sur écran situé à une distance $D = 1m$ de la fente.

1- Calculer la demi-largeur angulaire θ de la tache de diffraction.

2- Calculer la largeur totale L de la tache de diffraction observée sur l'écran. On tracera un schéma. On rappelle que si $\theta \leq 1$, on a $\tan\theta \approx \theta$.(unités radians)

3- Comment varie la largeur L si l'on diminue la distance D de moitié?

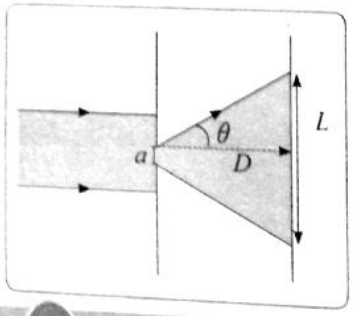
4- Comment varie la largeur L si l'on double la largeur a de la fente?

Solution

1- La demi-largeur angulaire de la tache de diffraction est donc:

$\theta = \frac{\lambda}{a} = 6,33.10^{-3} rad$

2- Le schéma de l'expérience est le suivant:



On observe, sur ce schéma, que l'on a la relation: $\frac{L}{2} = D\tan\theta$.

Or, $\tan\theta \approx \theta$ car θ est petit donc $L \approx 2D\theta$.

$L = 1,26cm$.

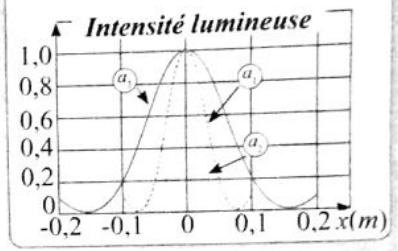
3- Si D est diminuée de moitié, alors L aussi.

4- On a $L = 2D\theta = 2D\frac{\lambda}{a}$

Si on double a, L est diminuée de moitié.

4 On réalise une expérience de diffraction lumineuse en éclairant une fente de diamètre variable a par une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633nm$.

L'intensité lumineuse de la figure de diffraction a été relevée (voir graphe ci-contre) pour trois valeurs du diamètre a.



a- Repérer sur le graphe ci-contre ce qui correspond à la tache centrale de diffraction.

b- Classer les trois diamètres a_1, a_2 et a_3 par valeurs croissantes.

c- Sachant que la distance de la fente à l'écran est égale à 2 mètres, donner les valeurs numériques de a_1, a_2 et a_3.On donne: $x_{max(1)} = 15,8\,cm$; $x_{max(2)} = 31,6\,cm$; $x_{max(3)} 7,9\,cm$.

Solution

a- On a indiqué sur le schéma ci-après la largeur de la tache centrale de diffraction: c'est la région centrale où l'intensité lumineuse est maximale.

b- On observe que la tache correspondant au diamètre a_2 est plus large que celle correspondant au diamètre a_1, elle -même plus large que celle correspondant au diamètre a_3. Les diamètres des fentes considérées obéissent à: $a_2 < a_1 < a_3$.

c- La largeur totale L de la tache centrale de diffraction est donnée par: $L = 2D\frac{\lambda}{a}$.

D étant la distance entre l'obstacle et l'écran d'observation, a la largeur de l'obstacle et λ la longueur d'onde du rayon diffracté.

De $L = 2D\frac{\lambda}{a}$, on tire: $a = 2D\frac{\lambda}{L}$.

On mesure $L = 2\,x_{max}$:

$L_1 = 15,8cm$ soit $a_1 = 16\mu m$;

$L_2 = 31,6cm$ soit $a_2 = 8\mu m$;

$L_3 = 7,9cm$ soit $a_3 = 32\mu m$.

5 Un étudiant est à côté d'un arbre dont le tronc a un diamètre de $1m$.

On donne: la célérité du son dans l'air $V = 340m.s^{-1}$, la célérité de la lumière dans le vide $C = 3.10^8 m.s^{-1}$; l'indice de réfraction de l'air $n \approx 1,0$ et la fréquence de la lumière $f = 5.10^{14} Hz$.

Le téléphone mobile reçoit des ondes électromagnétiques de fréquenc $f = 900MHz$

1- Peut-il entendre une personne, située de l'autre côté de l'arbre, qui chante un «la» de fréquence $f = 440Hz$?.

2- Peut-il la voir?

Scanned with CamScanner

3- Peut-il utiliser son téléphone mobile si l'antenne émettrice est située de l'autre côté de l'arbre?

Solution

1- Si les ondes suivent la loi de propagation rectiligne, elles ne pourront pas être reçues par une personne derrière un obstacle (l'arbre).

Seul un phénomène de diffraction permet à l'observateur de recevoir les ondes.

Nous allons donc comparer la longueur d'onde pour conclure quant à l'existence de la diffraction.

La longueur d'onde est:

$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{340}{440}$

$\lambda = 77cm$

Elle est du même ordre de grandeur que la taille de l'obstacle. Il y aura diffraction et l'étudiant pourra entendre la personne derrière l'arbre.

2- L'indice de l'air étant pris égal à 1, la lumière se propage dans l'air avec la même célérité que dans le vide. La longueur d'onde est donc: $\lambda = \frac{C}{f} = \frac{3.10^8}{5.10^{14}} = 600nm$.

Elle est très inférieure à la dimension de l'obstacle. Il n'y aura pas diffraction; la lumière suit la loi de propagation rectiligne, on ne peut pas voir la personne derrière l'arbre.

3- La longueur d'onde des ondes reçues par le téléphone est:

$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{3.10^8}{900.10^6} = 33cm$

Elle est du même ordre de grandeur que la dimension de l'obstacle. Il y a diffraction des ondes par le tronc, et l'étudiant peut utiliser son téléphone.

6 Détermination du diamètre d'un fil fin (Bac SM 2010) (Rattrapage)

Lorsque la lumière rencontre un obstacle, elle ne se propage plus en ligne droite, il se produit le phénomène de diffraction.

Ce phénomène peut être utilisé pour déterminer le diamètre d'un fil très fin.

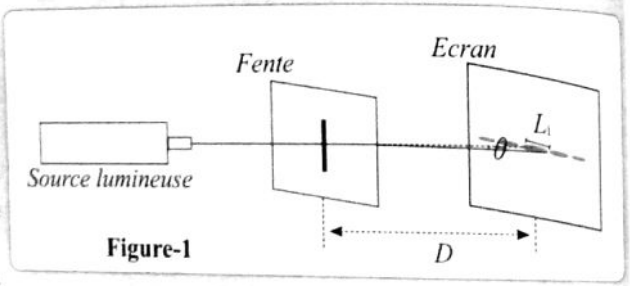


Figure-1

Données:

La célérité de la lumière dans l'air est $c = 3,00.10^8 m.s^{-1}$.

L'écart angulaire θ entre le centre de la tache centrale et la 1ère extinction lors de la diffraction par une fente ou par un fil est exprimé par la relation $\theta = \frac{\lambda}{a}$, dont λ est la longueur d'onde et la largeur de la fente ou le diamètre du fil.

1- Diffraction de la lumière:

On réalise une expérience de diffraction à l'aide d'une lumière monochromatique de fréquence $\upsilon = 4,44.10^{14}Hz$.

On place à quelques centimètres de la source lumineuse une fente verticale de largeur a.

La figure de diffraction est observée sur un écran vertical placé à une distance $D = 50,0cm$ de la fente.

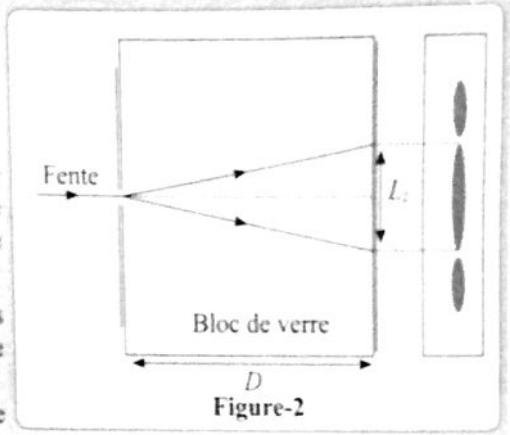


Figure-2

La figure de diffraction est constituée d'une série de taches situées sur une perpendiculaire à la fente, figure (1).

La tache centrale est plus éclairée et plus large que les autres, sa largeur est $L_1 = 6,70.10^{-1}cm$.

1.1- Cette expérience met en évidence quelle nature de la lumière?

1.2- Trouver l'expression de a en fonction de L_1, D, υ et C.

Calculer a.

2- On place entre la fente et l'écran un bloc de verre de forme parallélépipédique comme l'indique la figure (2).

L'indice de réfraction du verre pour la lumière monochromatique utilisée est $n = 1,61$

On observe sur l'écran que la largeur de la tache lumineuse centrale prend une valeur L_2.

Trouver l'expression de L_2 en fonction de L_1 et n.

3- Détermination du diamètre du fil de la toile d'araignée:

On garde la source lumineuse et l'écran à leur place. On enlève le bloc de verre et on remplace la fente par un fil rectiligne vertical de la toile d'araignée. On mesure la largeur de la tache centrale sur l'écran, on trouve alors $L_1 = 1,00cm$.

Déterminer le diamètre du fil de toile d'araignée.

Solution

1.1- L'expérience de diffraction montre que la lumière se comporte comme un onde.

1.2- $\tan\theta = \frac{L_1}{2D} \simeq \theta$ et $\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{C}{a.\upsilon}$;

d'où $\frac{L_1}{2D} = \frac{C}{a.\upsilon}$, donc $a = \frac{2D.C}{L_1.\upsilon}$ (1)

A.N: $a = 1,01.10^{-4}m$

2- Dans l'air (milieu 1): $L_1 = \frac{2D.C}{a.\upsilon}$;

dans le verre (milieu 2): $L_2 = \frac{2D.V}{a.\upsilon}$;

$\frac{L}{L} = \frac{C}{V} = n$, $L_2 = \frac{L_1}{n}$

3- Le diamètre du fil remplace la largeur a de la fente, d'où:

Scanned with CamScanner

$d = \frac{2D.C}{L.\upsilon}$

on trouve $d = 66,76.10^{-7} m$.

7 La diffraction de la lumière permet la détermination de la fréquence d'une onde lumineuse.

- Une lumière monochromatique de longueur d'onde λ produite par un laser est envoyée successivement, perpendiculairement sur des fils fins de diamètres connus d

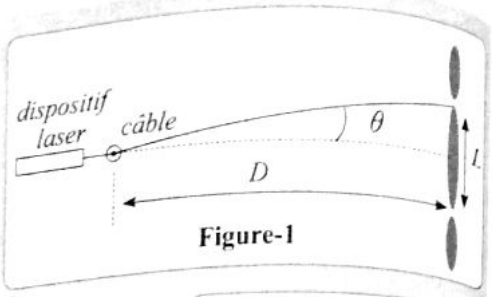


Figure-1

- Sur un écran placé à une distance D du fil, la mesure de la largeur L de la tache centrale de diffraction a permis de calculer l'écart angulaire θ correspondant à la tache centrale (figure 1) pour chacun des fils.

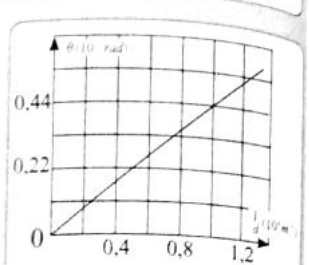


Figure-2

Données :

- On prend pour θ angle petit en radian: $\tan\theta \simeq \theta$.
- Vitesse de la lumière dans l'air $C \simeq 3.10^8 m.s^{-1}$.

1- Donner la relation entre θ, λ et d.

2- Etablir en utilisant la figure (1), la relation entre L, λ, d et D.

3- On représente sur la figure (2), la courbe de $\theta = f\left(\frac{1}{d}\right)$.

3.1- Déterminer à partir de cette courbe la longueur d'onde λ de la lumière utilisée. En déduire sa fréquence υ.

3.2- On éclaire maintenant l'un des fils précédents avec une lumière blanche, au lieu du laser.

Sachant que la longueur d'onde de cette lumière est comprise entre le violet $\lambda_v = 400nm$ et le rouge $\lambda_R = 80nm$:

a- déterminer la longueur d'onde de la lumière correspondant à la plus grande largeur de la tache centrale.

b- expliquer pourquoi le centre de la tache principale apparaît blanc sur l'écran.

Solution

1- $\theta = \frac{\lambda}{d}$ (1)

2- La figure donne $\tan\theta = \frac{L/2}{D} = \frac{L}{2D}$;

or, $\tan\theta \simeq \theta$ d'où $\theta = \frac{L}{2D}$ (2)

Les relations (1) et (2) donnent: $\frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{d}$.

3.1- $\theta = k.\frac{1}{d}$, la pente k représente λ

$\lambda = k = \frac{\Delta\theta}{\Delta\left(\frac{1}{d}\right)}$

$\lambda = \frac{(0,44-0).10^{-2}}{(1-0).10^4} = 4,4.10^{-7} m$

$\lambda = 0,44\mu m$

$\upsilon = \frac{C}{\lambda} = \frac{3.10^8}{4,4.10^{-7}} = 6,82.10^{14} Hz$

3.2.a- on a $\lambda = \frac{d}{2D}L = cte$.

L augmente lorsque λ augmente;

La valeur maximale de L est obtenue dans le visible, à l'aide de la lumière rouge $\lambda_R = 800nm$.

3.2.b- Chacune des radiations de la lumière blanche donne naissance à une tache centrale ayant la couleur de cette radiation.

Ces taches ont le même centre mais leur largeur L augmente avec λ.

La tache résultante de toutes les couleurs est rouge à la périphérie; mais au centre toutes les couleurs se superposent pour donner le blanc.

8 De la dispersion de la lumière à la diffraction (Bac SM 2013), session normale.

La fréquence d'une radiation lumineuse ne dépend pas du milieu de propagation; elle dépend uniquement de la fréquence de la source. La vitesse de propagation d'une onde lumineuse dans un milieu transparent est toujours plus petite que la vitesse de sa propagation dans le vide et sa valeur dépend du milieu de propagation. On constate aussi que l'onde lumineuse se diffracte lorsqu'elle traverse une fente de largeur relativement faible.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le phénomène de dispersion et celui de la diffraction.

Données: La vitesse de propagation d'une onde lumineuse dans l'air est approximativement égale à sa vitesse de propagation dans le vide $C = 3,00.10^8 m.s^{-1}$

Couleur de la radiation	**rouge** (R)	**violet** (V)
La longueur d'onde dans l'air en (μm)	0,768	0,434
L'indice de réfraction du verre	1,51	1,52

1- Dispersion de la lumière

Un faisceau parallèle de lumière blanche arrive au point I de la surface d'un demi-disque en verre; on observe sur l'écran (fig 1) les sept couleurs du spectre allant du rouge (R) au viole (V).

1.1- Exprimer la longueur d'onde λ_R de la radiation rouge dans le verre en fonction de l'indice de réfraction n_R du verre

Scanned with CamScanner

et de λ_{OR} (longueur d'onde dans l'air de ce rayonnement).

1.2- L'indice de refraction n d'un milieu transparent pour une relation $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ dont A et B sont des constantes qui dépendent du milieu.

Calculer la valeur de A et celle de B pour le verre utilisé.

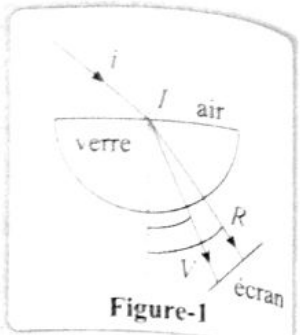


Figure-1

2- Diffraction de la lumière

On réalise l'expérience de la diffraction d'une lumière monochromatique de longueur d'onde λ dans l'air émise par un dispositif laser, en utilisant une fente de largeur a comme l'indique la figure 2. On mesure la largeur d de la tache centrale pour différentes valeurs de la largeur a de la fente et on représente graphiquement $d = f\left(\frac{1}{a}\right)$ on obtient alors la courbe indiquée dans la figure 3.

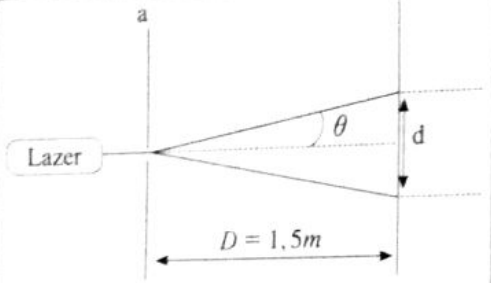


Figure-2

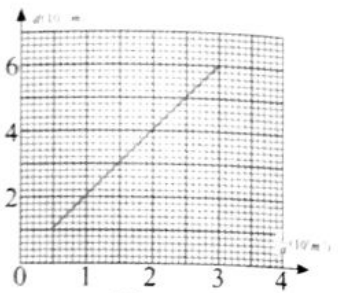


Figure-3

2.1- Trouver l'expression de d en fonction de λ, a et D, sachant que $\theta = \frac{\lambda}{a}$, ($\theta$ petit exprimé en rad).

2.2- A l'aide de la figure 3, déterminer la valeur de λ.

Solution

1.1- Pour la radiation rouge on a: dans le vide $\lambda_{OR} = C.T$ et dans le verre $\lambda_R = V_R.T$ (T période du rouge).

En combinant ces deux expressions:

$\frac{\lambda_{OR}}{\lambda_R} = \frac{C}{V_R} = n_R$

d'où: $\lambda_R = \frac{\lambda_{OR}}{n_R}$

1.2- $n_R = A + \frac{B}{\lambda_{OR}^2}$ et $n_V = A + \frac{B}{\lambda_V^2}$

$n_V - n_R = \left[\frac{B}{\lambda_{ON}^2} - \frac{1}{\lambda_{OR}^2}\right].B$

$B = (n_V - n_R).\frac{\lambda_{ON}^2.\lambda_{OR}^2}{\lambda_{OR}^2 - \lambda_{ON}^2} = 2,677.10^{-3}(\mu m)^2$

$A = n_R - \frac{B}{\lambda_{OR}^2} = n_V - \frac{B}{\lambda_{ON}^2} = 1,505$

2.1- L'analyse de la figure donne:

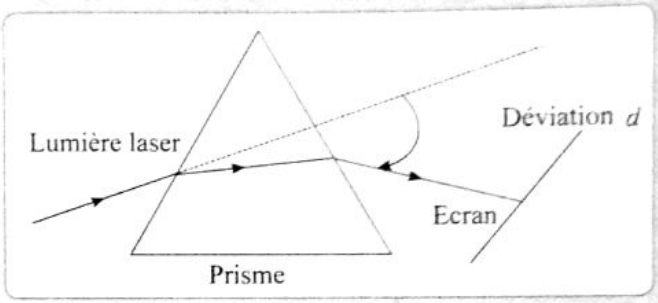
$\tan\theta = \frac{d}{2D}$: avec $\tan\theta = \theta$ et la formule $\theta = \frac{\lambda}{a}$ ou obtient: $\frac{d}{2D} = \frac{\lambda}{a}$, d'où $d = 2D.\lambda.\frac{1}{a}$

2.2- La pente k de la droite est $2D\lambda$ d'où

$\lambda = \frac{1}{2D}.k = \frac{1}{2.15}.\frac{2.10^{-3}}{1.10^{-3}}$

$\lambda \simeq 6,67.10^{-7} m = 0,667\mu m$.

9 Avant Isaac Newton, on pensait que le prisme ajoutait des couleurs au faisceau de lumière blanche. Newton place alors un deuxième prisme de telle manière qu'il ne soit atteint que par une seule couleur et découvre que la couleur reste inchangée.



On dirige, suivant une incidence donnée, le faisceau d'un laser de longueur d'onde $\lambda = 633nm$ vers l'une des faces du prisme de verre d'indice n placé dans l'air. On observe que ce faisceau est dévié.

Un écran placé derrière le prisme montre un point lumineux de même couleur que le faisceau incident.

1- Quelle est la nature de la lumière émise par le laser? Justifier votre réponse.

2- La célérité de la lumière dans la vide est $C = 3,00.10^8 m.s^{-1}$.

2.a- Rappeler la relation entre la longueur d'onde λ de l'onde émise par le laser, sa fréquence υ et sa célérité C. Calculer υ.

2.b- La valeur de υ varie-t-elle lorsque cette onde change de milieu de propagation?

3- Donner les limites des longueurs d'onde dans le vide du spectre visible et les couleurs correspondantes. Situer les domaines des rayonnements ultraviolets et infrarouges par rapport au domaine du spectre visible.

4- L'indice de réfraction du verre pour la fréquence υ de l'onde utilisée est de $n = 1,61$.

4.a- Pourquoi précise-t-on la fréquence υ de l'onde lorsqu'on donne la valeur de n?

4.b- Calculer la longueur d'onde λ' de cette onde dans le verre.

On remplace la lumière laser par une lumière blanche (c'est-à-dire comprenant toutes les longueurs d'onde données à la question 3).

Scanned with CamScanner

5- Tracer l'allure de deux rayons de longueur d'onde différente arrivant sur le prisme avec le même angle d'incidence sachant que la déviation d augmente quand la longueur d'onde diminue.

Solution

1- La lumière émise par la laser est composée d'une seule longueur d'onde de valeur $\lambda = 633nm$, cette lumière est donc une lumière monochromatique.

L'avantage d'un laser par rapport à une ampoule à incandescence, outre le fait d'avoir une lumière monochromatique, est d'obtenir une lumière de forte luminosité sur une petite surface.

2.a- $\lambda = C/\upsilon$ soit $\upsilon = C/\lambda$,

Avec: $\lambda = 633nm = 633.10^{-9}m$

et $C = 3,00.10^{8}m.s^{-1}$,

on a $\upsilon = C/\lambda = 3,00.10^{8}/633.10^{-9}$

$\upsilon = 4,74.10^{14}Hz$

2.b- La fréquence υ d'une onde ne dépend que de la source de l'onde, par conséquent si l'onde change de milieu sa fréquence υ n'est pas modifiée.

3- Le spectre de la lumière visible est compris entre les longueurs d'onde $400nm$ et $800nm$.

$\lambda = 400nm$ correspond au violet et $\lambda = 800nm$ correspond au rouge.

Le domaine des rayonnements ultraviolets (responsables des coups de soleil) est le domaine de longueurs d'ondes inférieures à $400nm$ et le domaine des rayonnements infrarouges (générés par des chauffages électriques) correspond aux longueurs d'onde supérieures à $800nm$.

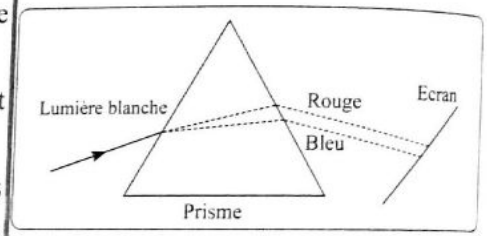
4.a- Lorsque l'indice de réfraction d'un milieu varie en fonction de la longueur d'onde donc en fonction de la fréquence de l'onde, le milieu est dit «dispersif». Il faut donc préciser la fréquence ou la longueur d'onde quand on donne la valeur d'un indice de réfraction.

4.b- La longueur d'onde (λ'), la vitesse (V) de l'onde dans le verre et la fréquence (V) sont liées par la relation: $\lambda' = \frac{V}{\upsilon}$.

De plus l'énoncé rappelle que $n = \frac{C}{V}$ soit que $V = \frac{C}{n}$; en combinant les 2 relations précédentes: $\lambda' = \frac{C}{n \times \upsilon}$.

Or, on sait que dans le vide: $\lambda = \frac{C}{V}$, alors finalement on obtient: $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$

Application numérique: $\lambda' = \frac{633}{1,61}nm$ soit $\lambda' = 393nm$



5- On sait que la déviation d augmente quand la longueur d'onde diminue. De plus on a: λ (bleu) $< \lambda$ (rouge) alors d (rouge) $< d$ (bleu).

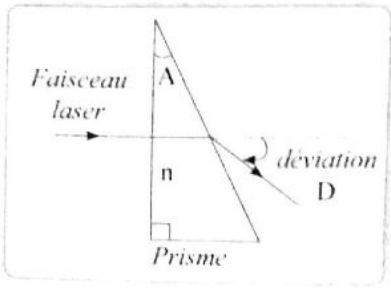
On peut donc compléter le schéma.

10 Un prisme d'angle au sommet $A = 2°$ est éclairé sous incidence normale par une lumière blanche.

La déviation D d'un rayon lumineux par le prisme est donnée par la formule approchée suivante:

$D = (n-1)A$.

où n est l'indice de réfraction du prisme.



1- Si l'on suppose le milieu non dispersif, qu'observe-t-on à la sortie du prisme?

2- Dans l'hypothèse plus réaliste où le milieu est dispersif, on admet que l'indice de réfraction est une fonction décroissante de la longueur d'onde.

Décrire ce que l'on observe à la sortie du prisme.

Solution

1- Si l'on suppose le milieu non dispersif, alors l'indice de réfraction et donc la déviation D est indépendante de la fréquence et donc de la longueur d'onde. Toutes les radiations qui composent la lumière blanche sont déviées de la même façon. On obtient donc un faisceau de lumière blanche à la sortie du prisme en l'absence de dispersion.

2- Si l'indice est une fonction décroissante de la longueur d'onde, alors il en est de même pour la déviation. A chaque valeur de la longueur d'onde correspond maintenant une valeur de la déviation.

Une radiation bleue de longueur d'onde inférieure à celle d'une radiation rouge sera plus déviée car la déviation décroît avec la longueur d'onde.

A la sortie du prisme, on obtient donc le spectre de la lumière blanche, du rouge au violet, par ordre de déviation croissante.

11 Une lumière polychromatique constituée de deux radiations de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,3nm$ et $\lambda_2 = 768,2nm$ rencontre la surface horizontale d'un volume d'eau en faisant un angle de $5°$ par rapport à la verticale.

On rappelle que la loi de Descartes s'écrit: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

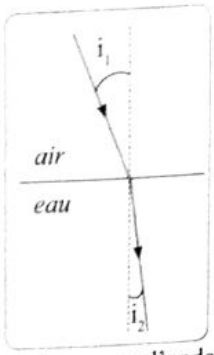
1- Dans l'hypothèse où l'eau est considérée comme non dispersive $(n = 1,33)$, calculer en utilisant les lois de la réfraction de Descartes, l'angle que le rayon réfracté forme avec la verticale.

2- Répondre à la même question dans l'hypothèse où l'eau est un milieu dispersif, sachant que: $n_1 = n(\lambda_1) = 1,3300$ et $n_2 = n(\lambda_2) = 1,3289$.

Scanned with CamScanner

Solution

1-



Pour les deux longueurs d'ondes on a:

$$\sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2} = \frac{1.\sin 5°}{1,33}$$

$$i_2 = 3,757°$$

On retrouve un résultat connu: le rayon se rapproche de la normale au dioptre lors de son passage dans un milieu d'indice de réfraction plus élevé.

2- Pour la radiation de longueur d'onde λ_1, l'indice $n_1 = 1,3300$ et comme précédemment, $i_2 = 3,757°$

Pour la radiation de longueur d'onde λ_2, l'indice $n_2 = 1,3289$ et l'on obtient:

$i_2 = 3,760°$.

On trouve une différence de l'ordre de 3 millièmes de degrés, tout à fait insignifiante!

12 ***La lumière, Une onde électromagnétique***

1- L'onde lumineuse et ses caractéristiques:

On rappelle que dans le vide, toutes les ondes électromagnétiques ont la même célérité $c = 3,00 \times 10^8 m.s^{-1}$

1.1- Pour une radiation de fréquence ν, donc de période T et de longueur d'onde λ, se propageant dans le vide à la célérité c, on propose les relations suivantes:

(a) $\lambda = \frac{c}{\nu}$ (b) $T = \frac{c}{\lambda}$ (c) $\lambda = c.T$

1.1.1- Donner la définition de la longueur d'onde.

1.1.2- Préciser l'unité de λ. Choisir dans les relations précédentes la (ou les) relations(s) correcte(s).

1.2- Une lampe à vapeur de lithium émet dans le vide une radiation intense se longueur d'onde égale à 571nm.

Déterminer la fréquence de cette radiation dans le vide.

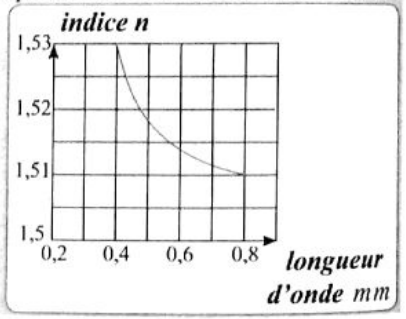
1.3- La radiation émise par la lampe à vapeur de lithium traverse un milieu transparent d'indice $n = 1,5$.

Un élève curieux s'interroge sur les caractéristiques de cette radiation dans ce milieu transparent puis il affirme: «la fréquence est inchangée et la longueur d'onde maintenant égale à 380 nm».

Ces affirmations sont-elles justes ou erronées? justifier.

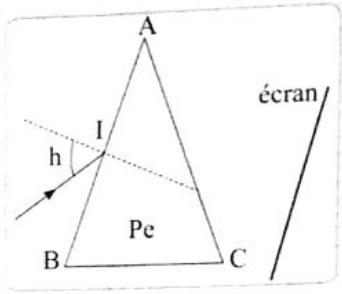
2- Analyse d'une lumière complexe; le spectromètre à prisme.

2.1- Ce spectromètre utilise les propriétés dispersives d'un prisme en verre.



Lorsqu'une lumière polychromatique est dirigée vers l'une des faces d'un prisme, chaque radiation est déviée d'un angle qui dépend de l'indice et donc de la longueur d'onde dans le vide λ.

Ci-dessous est représentée la variation de l'indice d'un verre en fonction de la longueur d'onde.



2.1.1- Qu'appelle t-on une lumière polychromatique?

2.1.2- A l'aide du graphique, déterminer les indices du prisme en verre pour ces longueurs d'onde limites du domaine visible.

2.2- Une lumière émise par une lampe à vapeur de mercure contient trois radiations intenses de longueur d'onde: 440 nm, 550 nm et 580 nm.

2.2.1- On place sur le trajet de la lumière un filtre qui ne laisse passer que la radiation de longueur d'onde 440 nm et on l'envoie vers le prisme réalisé avec le verre précédent sous une incidence $i_1 = 45°$ (voir la figure).

2.2.1.1- La radiation subit une première réfraction en I sur la face AB du prisme. On rappelle la loi de la réfraction:

$n_1.\sin(i_1) = n_2.\sin(i_2)$

Milieu (1): air d'indice: $n_1 = 1$ quel que soit λ. Milieu (2): verre.

Déterminer l'angle de réfraction dans le prisme pour cette radiation.

Tracer approximativement le rayon réfracté à l'intérieur du prisme sur la figure(1).

2.2.1.2- A la traversée de la face AC, une nouvelle réfraction se produit en I' et un rayon sort du prisme en présentant un angle de déviation D par rapport au rayon incident en I.

Compléter la marche du rayon lumineux sur la figure 1 et noter l'angle de déviation D

2.3- On enlève le filtre et un écran est placé après le prisme.

Que visualise-t-on sur l'écran lorsque le prisme reçoit l'ensemble de la lumière émise par la lampe à vapeur de mercure? justifier.

Solution

1.1.1- La longueur d'onde d'une onde périodique, de période T; est la distance parcourue par cette onde pendant une période temporelle T.

1.1.2- λ s'exprime en mètre (m).

Les propositions correctes sont (a) et (c).

1.2- $\upsilon = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3,00.10^8}{571.10^{-9}} = 5,25.10^{14} Hz$

1.3- Dans le verre du prisme:

$\lambda = V.T = \frac{V}{\upsilon}$, or $n = \frac{c}{\upsilon}$

alors; $\lambda = \frac{c}{n.\upsilon} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{571}{1,5} \simeq 380nm$

2.1.1- Une lumière polychromatique est une lumière composée de radiations lumineuses de fréquences différentes.

2.1.2- Pour la radiation violette: $n_v = 1,53$ et pour la radiation rouge: $n_R = 1,51$.

2.2.1- La loi de Descartes pour la réfraction s'écrit:

$$\sin i_2 = \frac{n_1.\sin i_1}{n_2} = \frac{1.\sin 45°}{1,52} = 0,465$$

On trouve $i_2 = 27,7°$

Scanned with CamScanner

2.2.2- Puisque l'angle de la réfraction d'un rayon du faisceau dépend de l'indice du prisme par rapport à ce rayon et par conséquent les différents rayons du faisceau n'ont pas le même trajet et ils quittent le prisme suivant des trajets différents. Sur l'écran, on obtient un spectre de la lumière étudié, dans lequel le rayon le plus dévié est le violet et le rayon le moins dévié est le rouge.

13 **(Bac SM 2011 - Rattrapage)**

Le milieu de propagation des ondes lumineuses est caractérisé par l'indice de réfraction $n = \frac{c}{v}$ pour une fréquence donnée, C est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide ou dans l'air et v la vitesse de propagation de la lumière monochromatique dans ce milieu.

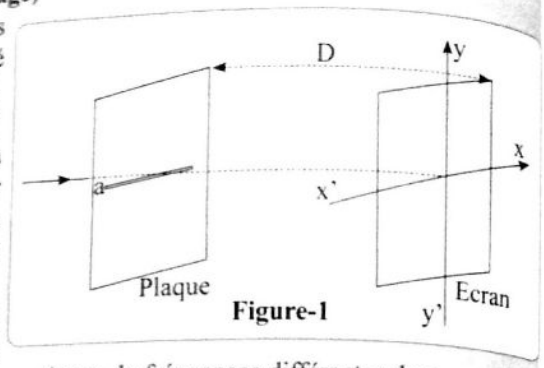


Figure-1

L'objectif de cet exercice est d'étudier la propagation de deux rayons lumineux monochromatiques de fréquences différentes dans un milieu dispersif.

1- Détermination de la longueur d'onde λ d'une lumière monochromatique dans l'air

On réalise l'expérience de diffraction en utilisant une lumière monochromatique de longueur d'onde λ dans l'air.

On place à quelques centimètres de la source lumineuse une plaque opaque dans laquelle se trouve une fente horizontale de largeur $a = 1,00mm$ (figure 1).

On observe sur un écran vertical placé à $D = 1,00m$ de la fente des taches lumineuses. La largeur de la tâche centrale est $L = 1,40mm$.

1.1- Choisir la réponse juste:

La figure de diffraction observée sur l'écran se forme:

a- Suivant l'axe $x'x$

b- Suivant l'axe $y'y$

1.2- Trouver l'expression de λ en fonction de $a, L,$ et D. Calculer λ.

On rappelle que l'écart angulaire est $\theta(rad) = \frac{\lambda}{a}$.

2- Détermination de la longueur d'onde d'une lumière monochromatique dans le verre transparent.

Un rayon lumineux (R_1) monochromatique

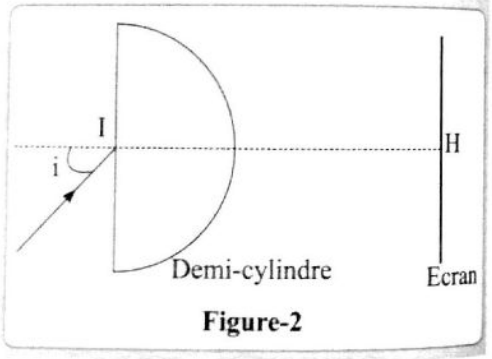


Figure-2

de fréquence $\upsilon_1 = 3,80.10^{14}Hz$ arrive sur la face plane d'un demi-cylindre en verre transparent au point d'incidence I sous un angle d'incidence $i = 60°$.

Le rayon (R_1) se réfracte au point I et arrive à l'écran vertical au point A figure (2).

On fait maintenant arriver un rayon lumineux monochromatique (R_2) de fréquence $\upsilon_2 = 7,50.10^{14}Hz$ sur la face plane du demi-cylindre sous le même angle d'incidence $i = 60°$. On constate que le rayon (R_2) se réfracte aussi au point I mais il arrive à l'écran vertical en un autre point B de telle sorte que l'angle ente les deux rayons réfractés est $\alpha = 0,563°$.

Données:

- L'indice de réfraction du verre pour le rayon lumineux de fréquence υ_1 est $n_1 = 1,626$.
- L'indice de réfraction de l'air est 1,00.
- $c = 3,00.10^8 m.s^{-1}$.

2.1- Montrer que la valeur de l'indice de rétraction du verre pour le rayon lumineux de fréquence υ_2 est $n_2 = 1,652$.

2.2- trouver l'expression de la longueur d'onde λ_2 du rayon lumineux de fréquence υ_2 dans le verre, en fonction de c, n_2 et υ_2. Calculer λ_2.

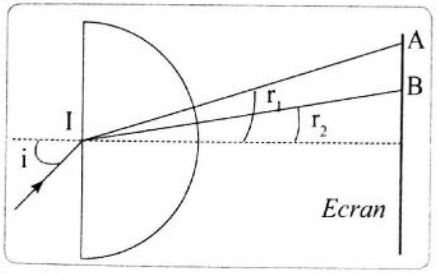
Solution

1.1- (b); la fente est horizontale, la figure de diffraction est donc verticale selon $y'y$.

1.2- La formule de la diffraction par une fente est pour la tache centrale $\theta = \frac{\lambda}{a}$ et; la figure permet d'obtient: $\tan\theta = \frac{L}{2D}$

$\tan\theta \simeq \theta$; alors $\frac{L}{2D} = \frac{\lambda}{a}$ d'où $\upsilon = \frac{L.a}{2D}$

2.1-



Appliquons la loi de Descartes pour la réfraction: $\sin i = n.\sin r$

Les deux rayons arrivent sous la même incidence (même i).

Puisque $n_2 > n_1$, on déduit que $r_2 < r_1$.

$\sin r_1 = \frac{\sin i}{n_1} = \frac{\sin 60°}{1,626} = 0,5326$

$r_1 = 32,18°$

$\alpha = r_1 - r_2 ; r_2 = r_1 - \alpha = 31,617°$

$n_2 = \frac{\sin i}{\sin r_2} = 1,652$

2.2- $n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{c}{\lambda.\upsilon_2}$, d'où $\lambda_2 = \frac{c}{n_2.\upsilon_2}$

$\lambda_2 = \frac{3,00.10^8}{1,652.7,50.10^{14}}$

$\lambda_2 = 2,42.10^{-7}m = 0,242\mu m$

Scanned with CamScanner

14

1- Un prisme, ayant pour section droite un triangle équilatéral, reçoit sur l'une de ses faces un rayon de lumière blanche sous une incidence d'environ 55°.

a- Qu'observe-t-on lors de l'émergence du faisceau lumineux?

b- Les limites des longueurs d'onde du spectre visible dans le vide sont:

Limite inférieure, $\lambda_i = 0,38\mu m$, violet profond ;

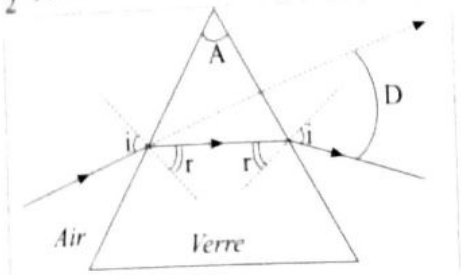
Limite supérieure, $\lambda_s = 0,80\mu m$, rouge profond.

Situer les rayonnements ultraviolets et infrarouges par rapport à ce spectre visible.

2- L'angle de déviation d'un rayon dépend de i et i' et 1.

Dans le cas particulier où $i' = i$, la loi de Descartes permet d'obtenir:

$\sin\left(\frac{D+A}{2}\right) = n \sin\frac{A}{2}$, avec A la valeur de l'angle au sommet du prisme.



Marche d'un rayon lumineux à travers un prisme

Pour trois longueurs d'onde λ, les valeurs des déviations minimums D_m sont mesurées avec un appareil de précision et notées sur le tableau suivant:

λ	$434nm$	$589nm$	$768nm$
D	$53,75°$	$51,18°$	$49,97°$

Calculer les indices de réfraction du verre du prisme, pour chaque longueur d'onde.

3.a- Calculer la célérité de la lumière dans le verre, pour chaque longueur d'onde.

b- La célérité de la lumière dans le verre du prisme est-elle fonction de la fréquence des radiations considérées?

Solution

1.a- A l'émergence du faisceau lumineux, on observe la dispersion de la lumière sous la forme d'un «éventail» représentant les couleurs de l'arc-en-ciel. Ce phénomène s'appelle la dispersion de la lumière blanche par un prisme. Les radiations les plus déviées sont les violettes et les bleues. Les radiation sont les orangées et les rouges.

b- Les radiations ultraviolettes ont des longueurs d'onde inférieures à $0,38\mu m$ et les radiations infrarouges ont des longueurs d'onde supérieures à $0,80\mu m$.

2- •Par hypothèse, la section droite du prisme est un triangle isocèle. Les angles au sommet ont donc pour valeur $A = 60,00°$.

• L'indice de réfraction du verre pour chaque longueur d'onde est donné par la relation: $n = \frac{\sin\left(\frac{D+A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$

Pour $\lambda = 434nm$,

$n(434nm) = \frac{\sin\left(\frac{53,75+60,00}{2}\right)}{\sin\frac{60,00}{2}}$

On trouve $n(434nm) = 1,675$

Pour $\lambda = 589nm$, $n(589nm) = 1,650$;

Pour $\lambda = 768nm$, $n(768nm) = 1,638$

3. a- Par définition, l'indice n_i d'un milieu transparent est donné par la relation: $n_i = \frac{c}{v_i}$. D'où, la célérité du verre pour une radiation déterminée: $v_i = \frac{c}{n_i}$

$V(434nm) = \frac{299792458}{1,675}$, ou encore

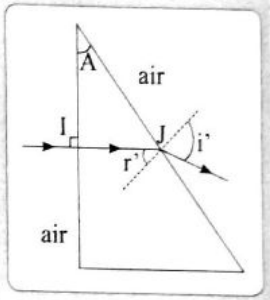
$n(434nm) = 1,790 \times 10^8 m.s^{-1}$

$V(589nm) = 1,817 \times 10^8 m.s^{-1}$

$V(768nm) = 1,830 \times 10^8 m.s^{-1}$

b- La célérité de la lumière dans le verre du prisme est fonction de la longueur d'onde dans le vide de la radiation considérée. Par définition, le milieu est dispersif, ce que l'expérience confirme.

15 On envoie sur un prisme en verre d'angle $A = 30°$, sous une incidence normale (voir fig), un mince faisceau d'une lumière polychromatique contenant une radiation violette de longueur d'onde dans le vide $\lambda_v = 0,434\mu m$ et une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide $\lambda_R = 0,656\mu m$.



Les indices du prisme pour ces radiations sont $n_R = 1,571$ et $n_v = 1,594$.

L'indice de réfraction de ce prisme pour une radiation de longueur d'onde dans le vide λ est donné par la relation: $n = A + \frac{R}{\lambda^2}$

Célérité de la lumière dans le vide et dans l'air: $c = 3,00.10^8 m/s$

1- Calculer les fréquence υ_R et υ_v de ces deux radiations.

2- Justifies que les rayons du faisceau ne subissent pas de déviation dans le prisme.

3- Exprimer l'angle d'incidence r' au point J en fonction de A.

4- En utilisant la loi de réfraction pour un rayon du faisceau, au point J.

Exprimes l'angle i' en fonction de A et n.

En déduire que l'angle de déviation s'exprime en fonction de A et n.

5- Sachant que $A = 30°$;

Calculer la valeur de l'angle de déviation D_R pour la radiation rouge et D_v pour la radiation violette.

Que peut-on conclure?

Scanned with CamScanner

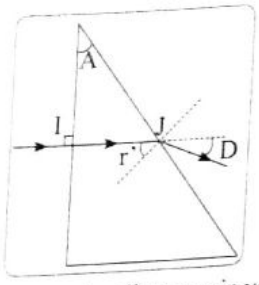
Solution

1- Dans le vide: $\lambda = \frac{c}{\upsilon}$, d'où $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$

$\upsilon_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{3.10^8}{0,656.10^{-6}} = 4,57.10^{14} Hz$

$\upsilon_V = \frac{c}{\lambda_V} = \frac{3,00.10^8}{0,434.10^{-6}} = 6,912.10^{14} Hz$

2-



L'incidence sur le dioptre air-verre est normale, cela veut dire que l'angle d'incidence est nul. $(i = 0)$

La loi de Descartes pour la réfraction s'écrit: $n_{air}.\sin i = n_{verre}.\sin r$

On a $\sin i = 0$, donc $\sin r = 0$ et $r = 0 (\forall n)$.

Tous les rayons du faisceau polychromatique suivent le même trajet IJ.

3- La figure ci-contre donne: $\alpha = \frac{\pi}{2} - A$

et $r' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

donc: $r' = A$

4- $n.\sin r' = n_{air}.\sin i'$

$\sin i' = n.\sin A$

$D = i' - r' = i' - A = \sin^{-1}(n.\sin A) - A$

$D_R = \sin^{-1}(n_R.\sin A) - A = 21,76°$

$D_V = \sin^{-1}(n_V.\sin A) - A = 22,84°$

- Le prisme permet de séparer les radiations d'une lumière polychromatique.
- La radiation bleue est beaucoup plus déviée que la radiation rouge.

16 Les fibres optiques sont des tubes très fins (comme des cheveux) en verre ou en plastique utilisés pour véhiculer une lumière transportant des information. Contrairement au fil de cuivre, les fibres optiques permettent la transmission des informations sans atténuation et avec un grand débit.

Une source lumineuse envoit à l'extrémité O d'une fibre optique un mince faisceau lumineux composé d'une radiation rouge de fréquence υ_R et une radiation bleue de fréquence υ_B.

Ces radiations parviennent au point O à la date $t = 0$ et se propagent horizontalement le long de la fibre de longueur L figure (1).

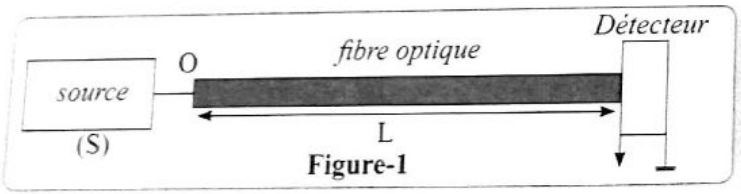


Figure-1

Un capteur relié à l'autre extrémité de la fibre a permis de détecter les signaux reçus figure (2).

La sensibilité horizontale est $4.10^{-3} \mu s/division$.

L'indice de réfraction du verre de la fibre optique utilisé dans cette expérience est exprimé par la relation suivante:

$n = 1,47 + 5,94.10^{-32}.\upsilon^2$

υ étant la fréquence de la radiation transversant la fibre exprimée Hertz.

Données: fréquence de la radiation rouge $\upsilon_R = 4,12.10^{14} Hz$; fréquence de la radiation bleue: $\upsilon_B = 7,20.10^{14} Hz$

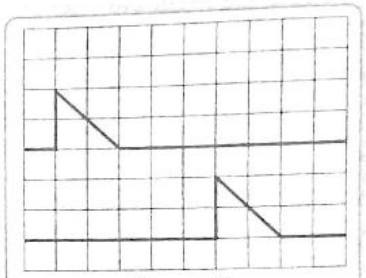


Figure-2

On prend pour la célérité de la lumière dans le vide et dans l'air: $C = 3,.10^8 m.s^{-1}$.

1- Choisir la ou (les) bonne(s) réponse (s):

1.1- Lorsqu'un rayon lumineux de fréquence υ se propage dans un milieu transparent, alors, sa vitesse de propagation s'exprime par:

a- $V = c.n$; **b-** $V = \frac{c}{n}$; c- $V = \frac{n}{c}$.

1.2- La longueur d'onde associée à ce rayon est:

a- $\lambda = v.\upsilon$; **b-** $\lambda = \frac{\upsilon}{v}$; **c-** $\lambda = \frac{v}{\upsilon}$

2- Répondre par «vrai» au «faux»

Lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu transparent à un autre milieu transparent, alors: a- Sa vitesse varie;

b- Sa couleur change;

c- Sa fréquence varie;

d- Sa longueur d'onde varie.

3- Calculer l'indice de réfraction n_R de la fibre optique pour la radiation rouge et l'indice n_B de la fibre pour la radiation bleue.

4- Déterminer les vitesses V_R et V_B de ces radiations dans la fibre.

Cette différence est liée à quel phénomène physique?

5- Déterminer la longueur L de la fibre.

6- On envoi maintenant dans la fibre optique des impulsions lumineuses très brèves de fréquence N. Chaque impulsion est constituée des ondes lumineuses dont les longueurs d'ondes λ sont situées entre λ_B et λ_R.

Chacune de ces ondes véhicule une information.

sachant que pour augmenter le débit des informations véhiculées par les ondes lumineuses, il faut augmente la fréquence N des impulsions, montrer que cette fréquence ne doit pas atteindre un seuil N qu'il faut déterminer.

Scanned with CamScanner

Solution

1.1- b- Vrai

1.2- c- Vrai

2- a- Vrai ; d-Vrai

3-

$n_R = 1,47 + 5,94.10^{-15}(4,12.10^{14})^2$

$n_R = 1,48$

$n_V = 1,47 + 5,94.10^{-15}(7,20.10^{14})^2$

$n_B = 1,50$

4- $v_R = \frac{c}{n_R} = \frac{3,00.10^8}{1,48} = 2,03.10^8 m.s^{-1}$

$v_B = \frac{c}{n_B} = \frac{3,00.10^8}{1,50} = 2,00.10^8 m.s^{-1}$

Cette différence est liée au phénomène de la dispersion.

La fibre optique est un milieu transparent dispersif.

5- $L = v_R.t_R$ et $L = v_B.t_B$

On remarque $v_R > v_B$ alors $t_R < t_B$

La durée Δt séparant l'arrivée de les deux rayons est:

$$\Delta t = t_B - t_R = \frac{L}{v_B} - \frac{L}{v_R} = L\left(\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_R}\right)$$

$$= L\left(\frac{v_R - v_B}{v_R.v_B}\right)$$

$$L = \frac{v_R.v_B}{v_R - v_B}.\Delta t$$

Graphiquement:

$\Delta t = 5div = 20.10^{-3}\mu.s$

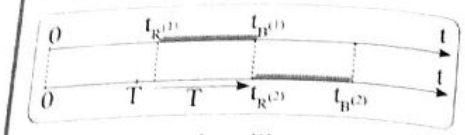
$$L = \frac{2,03.2,00.10^{16}}{(2,03 - 2,00)10^8}.2.10^{-8} \simeq 271m$$

6- Si les impulsions sont envoyées trop rapidement il peut y avoir un brouillage (mélange) des informations au niveau du capteur.

Considérons, deux impulsions successives notées (1) et (2).

Si (1) est envoyée à $t = 0$, elle sera reçue pendant la durée $\tau = t_R - t_B = 2.10^{-2}\mu s$

La deuxième impulsion est envoyée à $t = T$, elle sera reçue entre $T + t_R$ et $T + t_B$.



Pour éviter le brouillage, il faut que le rayon le plus rapide de l'impulsion (2) arrive après le rayon le plus lent de l'impulsion (1).

C'est-à-dire: $t_R(2) > t_B(1)$

Or: $t_R(2) = t_R(1) + T$

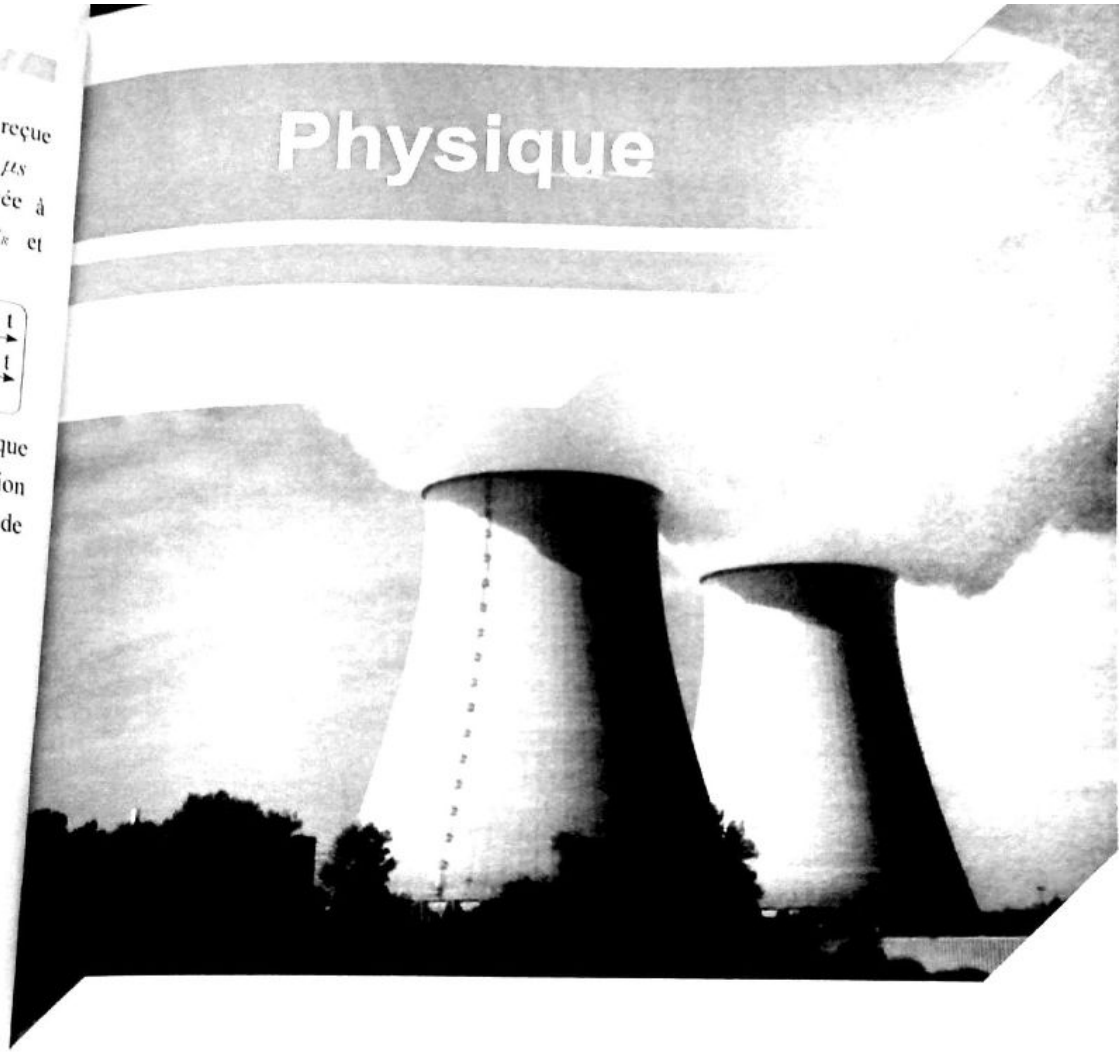
$t_R(1) + T > t_B(1)$

$T > t_B(1) - t_R(1) = \tau$

$\frac{1}{N} > \tau$, $N < \frac{1}{\tau} = N_{max}$

$N < N_{max} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\ 10^{-8}} = 5.10^7 Hz$

Physique



TRANSFORMATIONS NUCLÉAIRES

Scanned with CamScanner

4 TRANSFORMATIONS NUCLEAIRES SPONTANEES - DECROISSANCE RADIOACTIVE

I- Structure du noyau atomique:

- Un noyau atomique est forme de particules appelées nucléons: les protons et les neutrons.

Le nombre de nucléons est $A = Z + N$.

Z: nombre de protons, il est appelé le numéro atomique de l'atome.

N: nombre de neutrons.

- Un noyau atomique est représenté par le symbole ${}^{A}_{Z}X$.

Exemple:

${}^{7}_{3}Li$ désigne un noyau de lithium contenant $A = 7$ nucléons dont $Z = 3$ protons, et $7 - 3 = 4$ neutrons.

- Un nucléide (nuclide) est toute espèce nucléaire caractérisée par un nombre Z de protons et par un nombre N de neutrons.

Dans les 111 éléments chimiques on connaît actuellement 1500 nucléides.

- Les isotopes sont des nucléides d'un même élément chimique n'ayant pas le même nombre de neutrons.

Exemple:

Le carbone naturel a trois isotopes: ${}^{12}_{6}C$, ${}^{13}_{6}C$ et ${}^{14}_{6}C$.

II - Stabilité et instabilité des noyaux:

1 Les noyaux stables:

Les plus légers ($Z < 20$), sont caractérisés par $Z = N$.

Pour les autres noyaux stables ($N > Z$)

- Le diagramme de Segré donnent la vallée de stabilité.

2 Les noyaux instables:

La stabilité d'un noyau dépend de sa composition en nucléons. Certains noyaux se désintègrent spontanément en donnant un noyau différent et en émettant des particules appelées α, β et β' : Ces noyaux sont dits radioactifs.

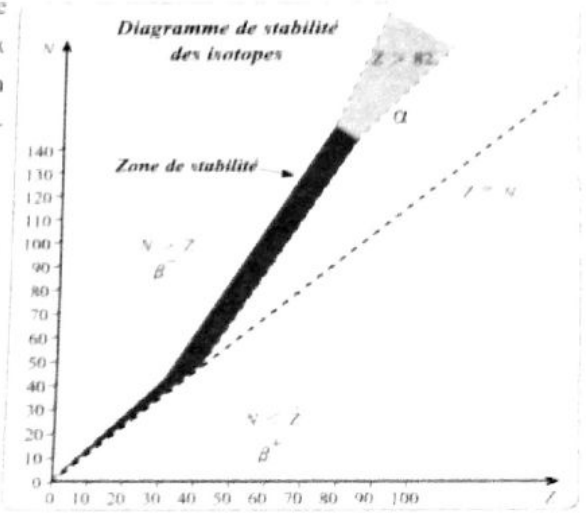
Les noyaux instables radioactifs s'écartent légèrement de la zone de stabilité. Ils se situent:

- De part et d'autre de cette zone, ces nucléides possèdent soit un excès de protons (*radiactifs* β^+) soint un excès de neutrons (*radiactifs* β^-).
- au- delà du dernier nucléide ($Z = 82$), ces nucléides possèdent un excès de nucléons.

Ce sont les noyaux lourds instables; ils se désintègrent par la radioactivité (α).

III- Equations des désintégration:

Une désintégration est représentée par une équation qui obeit à deux lois (lois de Soddy): conservation du nombre de nucléons et conservation de la charge électrique.



1 La radioactivité α :

La radioactivité α est l'émission de noyaux d'hélium ${}^{4}_{2}He$ par certains noyaux. Les noyaux d'hélium sont aussi appelés particules ou rayons α.

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y$$

Exemple:

$${}^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{222}_{86}Rn$$

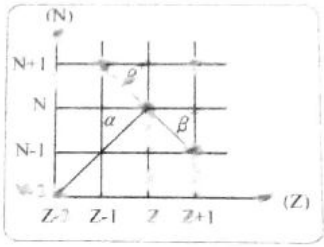
2 La radioactivité β :

La radioactivité β, encore appelée rayonnement β, est l'émissions d'électron par certains noyaux.

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z+1}Y$$

Exemple:

$${}^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$$



Scanned with CamScanner

3 La radioactivité β^+ :

La radioactivité β^+, encore appelée rayonnement β^+, est l'émission de positron par certains noyaux.

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{A}_{Z-1}Y$$

Exemple:

$$^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{0}_{1}e + {}^{30}_{14}Si$$

4 L'émission γ :

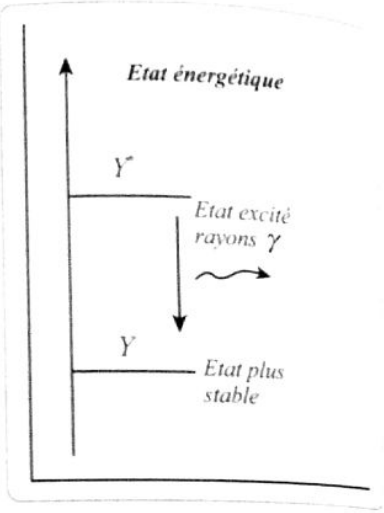
L'émission γ n'est pas une émission de particules matérielles.

Dans chaque désintégration $\alpha.\beta^-$ ou β^+ si le noyau-fils est émis dans un état excité, il retrouve son état fondamental stable en émettant un ou plusieurs rayonnements électromagnétiques très énergétiques appelés rayonnements γ.

La «particule» γ émise, nommée photon, n'a ni charge ni masse. Elle est caractérisée par $Z = 0$ et $A = 0$.

Au cours de l'émission γ, le nucléide se conserve:

$$^{A'}_{Z'}Y^* \longrightarrow {}^{A'}_{Z'}Y$$



Le rayonnement γ est très pénétrant. Il peut traverser plusieurs dizaines de centimètres de plomb, ou plusieurs mètres de béton.

IV- Famille radioactive:

C'est l'ensemble de noyaux - fils obtenus par désintégrations ou cascade à partir d'un noyau radioactif portant le nom de la famille.

Exemple:

La famille de l'uraminium $^{238}_{92}U$.

Cette famille s'arrête au noyau $^{206}_{82}Pb$ le plus stable après, 10 désintégrations α et 6 désintégrations β^-.

V- Décroissance radioactive d'une population:

1 Caractères du phénomène:

- Le phénomène de désintégration est imprévisible: pour un noyau instable donné, on ne peut prévoir la date de sa désintégration.
- Le phénomène de désintégration est aléatoire: pour un ensemble de noyaux instables identiques, on ne peut prévoir lesquels seront transformés à une date donnée.

2 Probabilité de désintégration:

- La loi de décroissance radioactive s'applique à une population de noyaux identiques subissant la même transformation.

Si on a N noyaux à une date t, le nombre de ces noyaux à $t + \Delta t$ est $N + \Delta N$, le nombre de noyaux disparus est $|\Delta N|$ dont la valeur dépend de trois paramètres: la durée Δt, le nombre N et la réaction étudiée. On exprime ceci par:

$\Delta N = -\lambda.N.\Delta t$

λ: coefficient de désintégration ; s'exprime en (temps)$^{-1}$.

Pour une durée dt, on écrit, $dN = -\lambda.N.dt$;

ou bien $\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$

Cette dernière expression est l'équation différentielle vérifiée par N.

La solution de cette équation différentielle s'écrit:

$N = N_0.e^{-\lambda t}$ voir figure (1).

VI- Constante de temps et demi-vie:

1 Constante de temps τ :

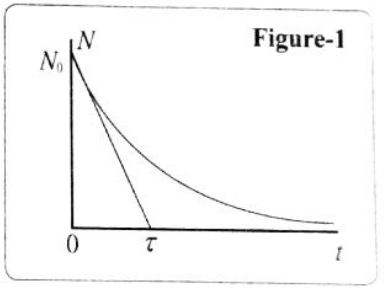
La tangente à la courbe à l'instant initial rencontre l'axe des abscisses à la date $t = \tau$

La dérivée de la fonction $N(t)$ est:

$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0.e^{-\lambda t}$; à la date $t = 0$,

On a: $\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = -\lambda N_0$. (1)

Figure-1



Cette dérivée est égale à la pente de la tangente de la courbe à $t = 0$

$$K = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{0 - N_0}{\tau - 0} = -\frac{N_0}{\tau} \quad (2)$$

$f(x) = ae^{-bx}$

$f'(x) = -abe^{-bx}$

Scanned with CamScanner

En comparant (1) avec (2) on tire: $\tau = \frac{1}{\lambda}$

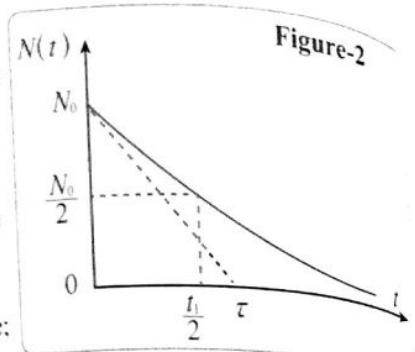
2 Demi-vie $t_{1/2}$ d'un élément radioactif:

La demi-vie est l'intervalle de temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents ont subi une désintégration.

Elle varie selon les éléments considérés.

Pour trouver la relation entre la demi-vie $t_{1/2}$ et la constante τ, on écrit, pour $t_{1/2}$:

Figure-2



$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \frac{t_1}{2}}$ et, en passant au logarithme:

$Ln\frac{1}{2} = -\lambda.\frac{t_1}{2}$

$t_{1/2} = \frac{ln\,2}{\lambda} = \tau.\ln 2$

$Y = e^X \Rightarrow X = \ln Y$		
$e^0 = 1$	$e^0 \simeq 2.71$	$\ln e = 1$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$		
$\ln\frac{1}{0} = -\ln$		

VII - Activité d'un échantillon radioactif:

1 Définitions:

- L'activité d'un échantillon est le nombre de désintégrations par seconde:

Elle est définie par $a = -\frac{dN}{dt}$.

L'activité s'exprime en Becquerel (Bq).

1 Becquerel représente 1 désintégration par seconde.

2 Expressions de l'activité:

$a = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}(N_0 e^{-\lambda t}) = +N_0.\lambda.e^{-\lambda t}$

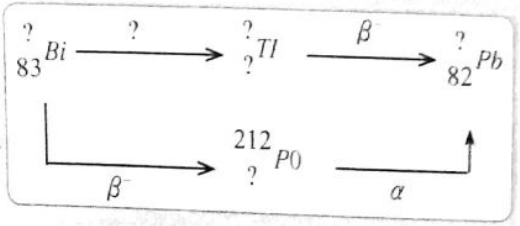
à $t = 0$, $a_0 = N_0\lambda$, d'où $a(t) = a_0 e^{-\lambda t}$

L'activité d'un échantillon à une date t est liée au nombre de noyaux $N(t)$: par

$Bq \swarrow a(t) = \frac{\lambda N(t)}{\uparrow (s-1)} = \frac{\frac{Ln2}{\nearrow t_{\frac{1}{2}}}}{(s)} N(t)$

Exercices

1 Le schéma ci-contre présente les deux voies de désintégration d'un noyau de bismuth radioactif. Préciser ce que cachent les points d'interrogation.

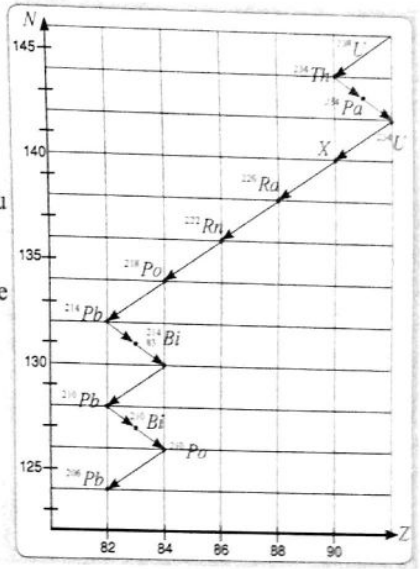


Solution

1- Les deux voies de désintégration du noyau de bismuth considéré sont:

$^{212}_{83}Bi \xrightarrow{\alpha} {}^{208}_{81}Tl \xrightarrow{\beta^-} {}^{208}_{82}Pb$ et $^{212}_{83}Bi \xrightarrow{\beta} {}^{212}_{84}Po \xrightarrow{\alpha} {}^{208}_{82}Pb$

2 On donne la figure ci-contre.



1- Que représente cette figure?

2- Quel est le noyau le plus stable?

3- Quel est le noyau le moins stable?

4- Donner le symbole et les constituants du noyau X.

5- Ecrire l'équation bilan du passage de ^{238}U à ^{206}Pb.

Solution

1- C'est la famille radioactive de l'uranium 238.

2- Le noyau le plus stable est $^{206}_{82}Pb$

3- Le noyau le moins stable dans cette famille est $^{238}_{92}U$.

4- L'élément X a pour symbole $^{230}_{90}Th$.

Ce noyau possède 140 neutrons et 90 protons.

5- Les désintégration dans cette famille sont soit de type α lorsque Z passe à $Z-2$ soit de type β^- lorsque Z passe à $Z+1$, on écrit donc:

$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\,{}^{4}_{2}He + y\left({}^{0}_{-1}e\right)$

Les lois de conservations donnent:

Scanned with CamScanner

$92 = 82 + 2x - y$ et $238 = 206 + 4x + 0$

On tire: $x = 8$ et $y = 6$

Il y a donc 8 désintégrations α et 6 désintégrations β^-.

3 On considère un échantillon de noyaux radioactifs de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$.

L'activité de cet échantillon à $t = 0$ est notée a_0.

Montrer qu'à la date $t = n.t_{\frac{1}{2}}$.

L'activité de cet échantillon s'exprime par $a = \frac{a_0}{2^n}$.

Solution

$a = a_0.e^{-\lambda t} = a_0.e^{-\lambda n t_{\frac{1}{2}}} = a_0 e^{-n\ln 2}$

Utilisons les propriétés:

$\ln(2)^n = n\ln 2$ et $e^{\ln x} = x$.

Donc $e^{n\ln 2} = e^{\ln 2^n} = 2^n$

D'où: $a = \frac{a_0}{2^n}$

Pour: $n = 1, a = \frac{a_0}{2}$

et pour $n = 2; a = \frac{a_0}{4}$

4 Combien de temps faut-il attendre pour que 99,9% d'une masse donnée de strontium $90\left(^{90}_{38}Sr\right)$ disparaisse?

Donnée: La demi-vie du $^{90}_{83}Sr$ est de 28 ans.

Solution

Dans l'expression $N = N_0 e^{-\lambda t}$, le rapport $\frac{N}{N_0}$ représente la fraction restante.

S'il disparaît 99,9% de l'échantillon, alors la proportion restante est:

$1 - 99,9\% = 0,1\% = 10^{-3}$

Cette valeur représente $\frac{N}{N_0}$

D'où: $\frac{N}{N_0} = 10^{-3} = e^{-\lambda t}$

$\lambda t = -Ln(10^{-3}) = 3Ln10$

$t = \frac{3Ln10}{Ln2}.t_{\frac{1}{2}} = \frac{3Ln10}{Ln2}.28 \simeq 279 ans.$

5 L'explosion de la centrale nucléaire de Tchernobyl en 1986 a libéré dans l'atmosphère du césium 137 radioactifs dont la constante radioactive vaut

$\lambda = 2,31.10^{-2} année^{-1}$.

1- Quel est le pourcentage de noyaux radioactifs restant dans l'atmosphère aujourd'hui 2016?

2- En déduire le pourcentage de noyaux qui se sont désintégrés depuis l'explosion.

3- En quelle année auront disparu 95% des noyaux libérés?

Solution

1- L'origine du temps $t = 0$ est fixée à la date de l'explosion, soit en l'année 1986.

L'année 2016 correspond à $t_1 = 30$ ans.

On en déduit le pourcentage de noyaux radioactifs restant: $\frac{N}{N_0} = \exp(-\lambda t_1) = 0,5$,

Il reste encore aujourd'hui 50% des noyaux de césium 137 libérés par l'explosion.

2- Le pourcentage de noyaux qui se sont désintégrés depuis l'explosion: est $100 - 50 = 50\%$.

3- On souhaite trouver la date t_2 pour laquelle 95% de noyaux se seront désintégrés, c'est-à-dire la date à laquelle il reste 5% des noyaux.

On a $0,05 = \exp(-\lambda t_2)$, soit:

$\ln(0,05) = (-\lambda t_2)$ ou encore:

$$t_2 = -\frac{In(0,05)}{\lambda}.$$

On trouve $t_2 = 130$ années. En l'an 2116; il va disparaître 95% des noyau de césium 137 radioactifs libérés en 1986 par l'explosion de Tchernobyl.

6 Le xénon 135, radioactif β^- donne naissance à un noyau de césium

La demi-vie de cette désintégration vaut 9,2h.

La masse d'un échantillon à une date $t = 0$ est m_0.

A une date $t = 9h$, l'activité de cette échantillon vaut $a = 2,84.10^{14} Bq$.

1- Ecrire l'équation de cette réaction.

2- Calculer l'activité a_0 de l'échantillon à l'état initial $(t = 0)$.

3- En déduire m_0. On donne: masse du noyau $m(^{135}X_e) = 2,24.10^{-25} kg$

4- A quelle date l'échantillon perd les trois quart de ses noyaux?

Solution

1- $^{135}_{54}X_e \longrightarrow ^{135}_{55}Cs + ^{0}_{-1}e$

2- $a = a_0.e^{-\lambda t}$,

$a_0 = a.e^{\lambda t} = 0.e^{\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}.ln2} = 2,84.10^{14}.e^{\frac{9}{9,2}Ln2}$

$= 5,595.10^{14}$

$a_0 = \lambda.N_0, N_0 = \frac{a_0}{\lambda} = \frac{a_0.t_{\frac{1}{2}}}{Ln_2}$

$N_0 = \frac{5,595.10^{14}.9,2.3600}{Ln2} = 2,67:10^{19}$

3- $m_0 = N_0.m(^{135}X_e) = \simeq 6.10^{-6} kg = 6mg$.

4- Lorsque $\frac{3}{4}$ des noyaux de xénon disparaissent, l'échantillon contient $\frac{1}{4}$ de sa qualité initiale en noyaux radioactifs.

$N = \frac{1}{4}N_0$

Or: $N = N_0.e^{-\lambda t}$, alors $\frac{N_0}{4} = N_0.e^{-\lambda t}$, d'où:

$e^{\lambda t} = 4$

$t = \frac{Ln4.t_{\frac{1}{2}}}{Ln2}$

$t \simeq 18,4h$

Scanned with CamScanner

7 On considère deux isotopes radioactifs de l'iode, utilisés en médecine: l'iode $131\left({}^{131}_{53}I\right)$ de demi-vie 8,1 j, et l'iode $123\left({}^{123}_{53}I\right)$ de demi-vie 13h.

Données: Nombre d'Avogadro: $N_A \approx 6,02.10^{23} mol^{-1}$.

Masses molaires en $g.mol^{-1}$: $M({}^{131}I) = M_1 = 131$; $M({}^{123}I) = M_2 = 123$

Masses molaires en $g.mol^{-1}$: $M({}^{131}I) = M_1 = 131$; $M({}^{123}I) = M_2 = 123$

Masses molaires en $g.mol^{-1}$: $M({}^{131}I) = M_1 = 131$; $M({}^{123}I) = M_2 = 123$

1- On dispose de deux échantillons de masse $m = 10g$ de ces deux isotopes.

Quelles sont leurs activités initiales $a_0(1)$ et $a_0(2)$?

2- Au bout de combien de temps leurs activités sont-elles égales?

Solution

1- L'activité initiale d'un échantillon est:

$a_0 = \lambda.N_0 = \lambda.\frac{m_0}{M}N_A$

$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$

Pour l'iode 131: Pour ${}^{131}I$:

$a_0(1) = \lambda_1.\frac{m_0(1).N_A}{M_1} = \frac{Ln2}{t_{\frac{1}{2}}(1)}\frac{m_0(1).N_A}{M_1}$

$a0(1) = \frac{Ln2}{8,1.24.3600}\cdot\frac{10}{131}.6,02.10^{23}$

$\simeq 4,6.10^{16} Bq$

et pour ${}^{123}I$: $a_0(2) = \frac{L_n 2}{t_{\frac{1}{2}}(2)}\cdot\frac{m_0(2).N_A}{M_2}$

En trouve: $a_0(\ ) \simeq 7,210^{17} Bq$

2- Imposons la condition: $a_2(t) = a_1(t)$;

Ceci nous amène à écrire:

$a_0(2).e^{-\lambda_2 t} = a_0(1).e^{-\lambda_1 t}$

$e(\lambda_1 - \lambda_2)t = \frac{a_0(1)}{a_0(2)}$

$(\lambda_1 - \lambda_2)t = Ln\frac{a_0(1)}{a_0(2)}$

$Ln2\left(\frac{1}{t_{\frac{1}{2}}(1)} - \frac{1}{t_{\frac{1}{2}}(2)}\right) = t\ \ Ln\frac{a_0(1)}{a_0(2)}$

$t = \frac{t_{\frac{1}{2}}(1).t_{\frac{1}{2}}(2)}{t_{\frac{1}{2}}(1) - t_{\frac{1}{2}}(2)}\cdot\frac{1}{\ell n2}.Ln\frac{a_0(1)}{a_0(2)}$

$t = \frac{194\times 13}{194-13}\times\frac{1}{\ell n2}\times In\frac{7,2.10^{17}}{4,6.10^{16}} \approx 55h$

Les activités des deux échantillons seront égales au bout de 2 jours et 7 heures.

8 On dispose d'une source radioactive de noyaux identiques émetteur β^-.

On mesure l'activité de cet échantillon à une date t de l'on trouve: $63Bq$.

Quatre heures plus tard, une deuxième mesure a donné $18Bq$.

Calculer $t_{\frac{1}{2}}$ la période de demi-vie de cette source

Solution

La première mesure nous amène à écrire:

$a_1 = a_0.e^{-\lambda t_1}$, (1)

et la deuxième: $a_2 = a_0.e^{-\lambda(t_2+t_1)}$ (2);

On a $t_2 - t_1 = \Delta t = 1h$.

Faisons apparaitre Δt en divisant (1) par (2): $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0.e^{-\lambda t_1}}{a_0.e^{-\lambda t_2}} = e^{\lambda(t_2-t_1)} = e^{\lambda}\Delta t$

Ensuite: $Ln\frac{a_1}{a_2} = \lambda t = \frac{Ln2}{t_{\frac{1}{2}}}.\Delta t$

$\frac{t_1}{2} = \frac{Ln2}{Ln(a_1/a_2)}.\Delta t$

$t_{\frac{1}{2}} = \frac{Ln2}{Ln(63/18)}.4 = 2,2h = 2h13mn$

9 Le noyau de polonium ${}^{210}_{84}Po$ se désintègre spontanément pour se transformer en un noyau de plomb ${}^{206}_{Z}Pb$ avec émission d'une particule α.

Cet exercice se propose d'étudier le bilan énergétique de cette transformation ainsi que l'évolution de cette dernière au cours du temps.

1- Ecrire l'équation de cette transformation nucléaire en déterminant le nombre Z.

2- Soit $N_0(Po)$ le nombre de noyaux de polonium dans un échantillon à l'instant de date $t = 0$ et $N(Po)$ le nombre de noyaux restant dans le même échantillon à un instant de date t.

2.1- On désigne par N_D le nombre de noyaux de polonium désintégrés l'instant de date $t = 4.t_{\frac{1}{2}}$.

Choisir la proposition juste parmi les propositions suivantes:

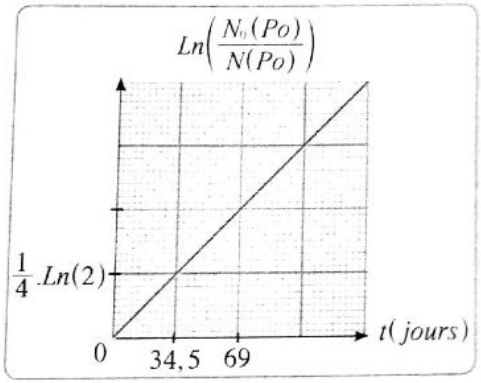
a- $N_D = \frac{N_0(Po)}{8}$;

b- $N_D = \frac{N_0(Po)}{16}$;

c- $N_D = \frac{N_0(Po)}{4}$;

d- $N_D = \frac{15N_0(Po)}{16}$.

2.2- La courbe ci-dessous représente les variations de $Ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right)$ en fonction du temps.



A l'aide de cette courbe, déterminer en jour la demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$.

2.3- Sachant que l'échantillon ne contient pas du plomb à $t = 0$, déterminer en jour, l'instant t_1 pour lequel:

$\frac{N(Pb)}{N(Po)} = \frac{2}{5}$, où $N(Pb)$ est le nombre de noyaux de plomb formés à cet instant.

Solution

1- ${}^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{Z}Pb + {}^{4}_{2}He$

La loi de Soddy donne: $Z = 84 - 2 = 82$

2.1- La proposition juste est (b).

Justification:

$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\lambda.4t_{\frac{1}{2}}} = e^{-4\ln 2} = e^{Ln^{-4}}$

$= 2^{-4} = \frac{1}{16}$, $\frac{N}{N^0} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Scanned with CamScanner

2.2- $Ln\frac{N_0}{N} = e^{\lambda t}$, $Ln\frac{N_0}{N} = \lambda.t$

La pente $\lambda = \frac{1}{4}\cdot\frac{Ln2}{34,5}$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{Ln^2}{\lambda} = 4.34,5 = 138 jours$$

2.3- Il y a conservation des noyaux Po:

$N_o = (P_o) = N(P_o) + N(Pb)$

$$\frac{N(Pb)}{N(P_o)} = \frac{N_o(P_o) - N(P)}{N(Po)}$$

$$= \frac{N_o(Po)}{N(Po)} - 1 = e^{\lambda t} - 1$$

$$e^{\lambda t} = \frac{N(Pb)}{N(Po)} + 1 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5}$$

$$\lambda t = Ln\frac{7}{5} \rightarrow t = \frac{Ln(7/5)}{Ln2}.t\frac{1}{2} = 67_j$$

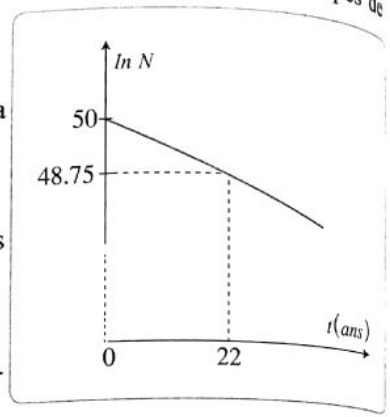
10 Le tritium, ${}^3H$ radioactif β^- conduit à la formation de l'un des isotopes de l'hélium He.

1- Ecrire l'équation de cette désintégration

2- On dispose d'un échantillon contenant à la date $t = 0$, N_0 noyaux de tritium, ${}^3H$.

Soit N le nombre de ces noyaux à la date t.

La courbe de la figure ci-contre représente les variations de LnN en fonction du temps.



2.1- Déterminer N_0

2.2- Déterminer $t_{\frac{1}{2}}$ la demi-vie de cette désintégration.

Solution

1- ${}^3_1H \longrightarrow {}^3_2He + {}^0_{-1}e$

2- Utilisons l'opérateur Ln et la loi:

$N = N_0 e^{-\lambda t}$

$LnN = LnN_0 - \lambda t = A + B.t$

2.1- Graphiquement $A = 50$ et

$A = LnN_0$

D'où: $LnN_0 = 50$, donc:

$$N_0 = e^{50} = 5,18.10^{21}$$

2.2- La pente B représente $(-\lambda)$

Graphiquement,

$$B = \frac{48,75 - 50}{22} \simeq -5,682.10^{-2} ans^{-1}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{Ln2}{\lambda} \simeq \frac{Ln2}{5,68.10^{-2}} \simeq 12,2\ ans.$$

11 Le radon ${}^{222}_{86}Rn$ fait partie d'une famille radioactive qui, par une série d'émissions α et β^-, aboutit au plomb ${}^{206}_{82}Pb$.

1- Ecrire l'équation de la réaction nucléaire représentant l'émission α par des noyaux ${}^A_ZX$.

2- Ecrire l'équation de la réaction nucléaire représentant l'émission β^- par des noyaux ${}^A_ZX$.

3- En déduire le nombre de désintégrations α et β^- émises pour passer du Rn 222 au Pb 206.

On prépare un échantillon de 1 mg de ${}^{222}_{86}Rn$ et on mesure la décroissance dans le temps de la masse m du radon restant:

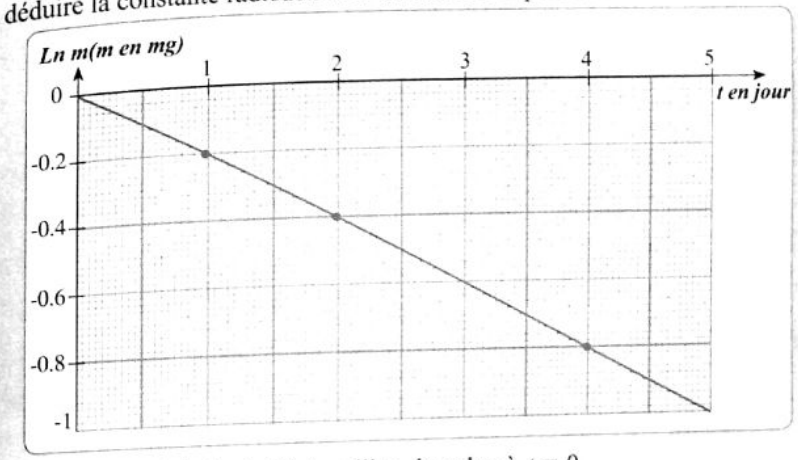
t (jour)	0	1	2	3	4	5
m (mg)	1	0,83	0,69	0,58	0,48	0,40

4.a- A l'aide des données du tableau, donner l'ordre de grandeur de la demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ du radon 222.

4.b- Le graphe de $Ln(m) = f(t)$ est donné ci-après

Indiquer la nature de la courbe obtenue.

En déduire la constante radioactive λ du radon 222 puis sa demi-vie.



5- Calculer l'activité A_0 de l'échantillon de radon à $t = 0$.

Calculer la masse m_{10} et l'activité A_{10} de l'échantillon de radon à $t = 10$ jours.

Données: Masse molaire du radon 222: $M = 222\ g.mol^{-1}$

Nombre d'Avogadro: $N_A = 6,02\,10^{23} mol^{-1}$

Solution

1- ${}^A_ZX \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He$

2- ${}^A_ZX \longrightarrow {}^A_{Z+1}Y + {}^0_{-1}e$

3- ${}^{222}_{86}Rn \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\left({}^4_2He\right) + y\left({}^0_{-1}e\right)$

$\begin{cases} 222 = 206 + 4x\,,\ x = 4 \\ 86 = 82 + 2x - y\,,\ y = 82 + 2x - 86 = 4 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

4.a- $t \simeq 3,5 jours$

4.b- $m = m_0 e^{-\lambda t}$,

$Lnm = -\lambda t + Lnm_0$; (m en mg)

$m_0 = 1mg \Longrightarrow Lnm_0 = 0$

La pente de la droite est:

$-\lambda = \frac{-0,4-0}{2-0} = -0,2\ j^{-1}$

$t_{\frac{1}{2}} = \frac{Ln2}{\lambda} = \frac{Ln2}{0,2} = 3,46j$

5- $a_0 = \lambda N_0 = \lambda . \frac{m_0 . N_A}{M}$

$= 0,2 . \frac{1,10^{-3}}{222} . 6,0210^{23}$

$a_0 = 5,42\,10^{17}$ désintégration par jour

Ou bien en:

(Bq): $\lambda = 0,2\ j^{-1} = 2,31.10^{-6} s^{-1}$

$a0 = 2,31.10^{-6} . \frac{10^{-3}}{222} . 6,02.10^{23}$

$= 6,28.10^{12} Bq$

5- $m = m_0 . e^{-\lambda t}$

$m = 1 . e^{-0,2.10} = 0,135mg$

12 On peut dater l'âge d'une matière animale ou végétale grâce aux éléments radioactifs. L'isotope $^{14}_{6}C$ du carbone, radioactif β^-, de demi-vie $t_{\frac{1}{2}} = 5730ans$, est présent dans l'atmosphère sous forme de dioxyde de carbone, en proportion infime mais constante par rapport à l'isotope $^{12}_{6}C \left(r_0 = \frac{N_0(carbone\ 14)}{N_0(carbone\ 12)} \simeq 10^{-12} \right)$

Les végétaux absorbent le dioxyde de carbone atmosphérique et fixent l'isotope 14 du carbone dans leur tissu. Tous les êtres vivants consommant des plantes absorbent également cet isotope. Au cours de leur vie, végétaux, animaux et humains en contiennent une proportion constante ($r_0 \simeq 10^{-12}$). Après la mort, l'isotope $^{14}_{6}C$ n'est plus absorbé. Sa teneur diminue au rythme des désintégrations radioactives. La mesure de l'activité d'un échantillon permet d'évaluer le rapport r, donc la date de sa mort.

Données: $N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}$, $M(^{12}C) = M = 12g.mol^{-1}$, $1an = 365jours$.

Pour déterminer l'âge t d'une momie des pharaons, trouvée en 1980, des chercheurs ont prélevé une masse $m = 100mg$ de matière organique de cette momie. Les analyses effectuées ont montré que cette masse contient la proportion $\rho = 10\%$ de carbone et que son activité radioactive vaut $a = 1,16mBq$.

- Montrer que le nombre N_0 de noyaux $^{14}_{6}C$ dans la masse m, à la date t_0 où le pharaon meurt est $N_0 = \frac{r_0 . m . \rho . N_A}{M}$.

En déduire a_0 l'activité de l'échantillon le pharaon était en vie

Calculer l'âge de la momie.

Solution

1- $N_0(^{14}C) = r_0 . N(^{12}C)$

$N_0(^{12}C) = n_0(^{12}C) . N_A = \frac{m(^{12}C)}{M(^{12}C)} . N_A$

$\rho = \frac{m(C)}{m} = \frac{m(^{12}C) + m(^{14}C)}{m}$

Comme $m(^{14}C)$ est négligeable devant $m(^{12}C)$; $\rho = \frac{m(^{12}C)}{m}$;

alors: $N_0(^{12}C) = \frac{\rho . m . N_A}{M}$

D'où: $N_0(^{14}C) = \frac{r_0 . \rho . m . N_A}{M}$

2- $a_0 = \lambda_0 . N_0(^{14}C) = \frac{(Ln2) . r_0 . \rho . m . N_A}{t_{\frac{1}{2}} . M}$

$a_0 = \frac{Ln2.10^{-12}.10^{-1}.10^{-1}.6,02.10^{23}}{5730.365.24.3600.12}$

$\simeq 1,92mBq.$

3- $a = a_0 e^{-\lambda t}$; $\frac{a_0}{a} = e^{\lambda t}$; $\lambda t = Ln\frac{a_0}{a}$

$t_{\frac{1}{2}} . Ln2 . t = Ln\left(\frac{a_0}{a}\right)$; $t = t_{\frac{1}{2}} . Ln\left(\frac{a_0}{a}\right) . \frac{1}{Ln2}$

$t = \frac{5730.Ln(1,92/1,16)}{Ln2} \simeq 4165ans$

13 Pour déterminer l'âge de cailloux lunaires rapportés par les astronautes d'Apollo XI, on mesure les quantités relatives de potassium 40 et de son produit de désintégration, l'argon 40, qui est retenu à l'intérieur de la roche. Un échantillon de masse 10,00g de roche contient un volume $v = 82mm^3$ d'argon 40 et une masse $m = 16,6\mu g$ de potassium 40. Le volume du gaz est donné dans les conditions normales et on rappelle que l'argon est un gaz monoatomique et que l'argon 40 est stable.

Données: Constante d'Avogadro: $N_A = 6,02 \times 10^{23} mol^{-1}$

Volume molaire $V_m = 22,4L.mol^{-1}$.

Masse molaire atomique de l'isotope de potassium 40: $M_K = 40,0g.mol^{-1}$

Le temps de demi-vie de l'isotope $^{40}_{19}K$ est: $t_{1/2} = 1,26 \times 10^9 ans$.

1- Ecrire l'équation de désintégration du potassium 40 en argon $^{40}_{18}Ar$.

2- Etablir la relation entre la constante de désintégration λ et la période de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$.

Calculer λ.

3- On pose N_{Ar} le nombre de noyaux d'argon 40 et N_K le nombre de noyaux de potassium 40 présents dans l'échantillon au moment de l'analyse.

Calculer le rapport $r = \frac{N_{Ar}}{N_K}$.

4- On pose N_{K0} le nombre de noyaux de potassium 40 à la formation de la roche.

Exprimer le rapport $\frac{N_K}{N_{K0}}$ en fonction de r.

Exprimer l'âge t de la roche analysée

Calculer cette date.

Scanned with CamScanner

Solution

1- L'équation de désintégration de l'isotope ${}^{40}_{19}K$ est: ${}^{40}_{19}K \longrightarrow {}^{0}_{1}e + {}^{40}_{18}Ar$.

2- D'après la loi de décroissance radioactive: $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Par définition, le temps de demi-vie d'un isotope est tel que si $N = \frac{N_0}{2}$ alors $t = t_{\frac{1}{2}}$. En portant ces conditions dans ( ), on obtient: $In\frac{1}{2} = -\lambda t_{\frac{1}{2}}$.

D'où: $In2 = \lambda t_{\frac{1}{2}}$.

La constante radioactive de l'isotope ${}^{40}_{19}K$ est donc:

$\lambda = \frac{In2}{t_{\frac{1}{2}}}$; $\lambda = 5,50 \times 10^{-10} an^{-1}$ ou encore

$\lambda = 1,74 \times 10^{-17} s^{-1}$.

3- Le nombre N de noyaux contenus dans un échantillon de n (moles) de ces noyaux est $N = n.N_A$.

- Le potassium 40 est à l'état solide:

$$N(K) = \frac{m(K)}{M(K)}.N_A$$

et, l'argon est à l'état gazeux:

$$N(Ar) = \frac{v}{V_m}.N_A$$

Le rapport r s'écrit alors:

$$r = \frac{N(Ar)}{N(K)} = \frac{v.M(K)}{V_m.m(K)} = \frac{vM_K}{V_m m}$$

$$r = \frac{82,0 \times 10^{-9} \times 40,0 \times 10^{-3}}{22,4 \times 10^{-3} \times 16,6 \times 10^{-6}}; r = 8,82$$

4- On peut écrire:

$N_K(initial) = N_K(restant) + N_K(disparus)$

Or, les noyaux de potassium disparus sont remplacés par le même de noyaux d'argon formés.

donc: $N_{K0} = N_K + N_{Ar}$

Le rapport $\frac{N_K}{N_{K0}}$ est donc:

$$\frac{N_K}{N_{K0}} = \frac{N_K}{N_K + N_{Ar}} = \frac{1}{1+r}$$

En utilisant la loi $N_K = N_{K0}e^{-\lambda t}$, on

$$\frac{N_K}{N_{K0}} = e^{-\lambda t} = \frac{1}{1+r}$$

$$e^{\lambda t} = 1 + r$$

alors: $\lambda t = Ln(1+r)$

Comme: $In2 = \lambda t_{1/2}$

$$Ln\frac{1}{1+r} = -Ln\frac{2}{t_{1/2}}t \text{ ou encore:}$$

$$Ln(1+r) = Ln\frac{2}{t_{1/2}}t$$

L'âge du caillou rapporté de la Lune est donc: $t = \frac{Ln(1+r)}{Ln2}t_{1/2}$

$$t = \frac{Ln(1+8,82)}{Ln2} \times 1,26 \times 10^9$$

$$t = 4,15 \times 10^9 ans.$$

14 Les roches volcaniques contiennent du potassium ${}^{40}K$ radioactif qui se transforme en argon 40 avec une demi-vie de $1,3.10^9 ans$. Au cours des siècles, l'argon 40 s'accumule alors que le potassium disparaît.

Lors d'une éruption volcanique, la lave dégaze: l'argon présent dans la lave s'échappe. A la date t de l'éruption, la lave solidifiée ne contient alors plus que l'argon antérieur à l'événement.

L'analyse d'un échantillon de basalte trouvé près d'un ancien volcan montre qu'il contient $m_1 = 2,9800mg$ de potassium et $m_2 = 8,6\mu g$ d'argon 40.

Données: $M({}^{40}K) \simeq M({}^{40}Ar) = M$

1- Exprimer le nombre de noyaux de potassium 40 juste après l'éruption en fonction des nombres de noyaux de potassium 40 et d'argon 40 à la date d'analyse.

2- Montrer que la date t de l'éruption s'exprime:

$$t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{Ln2}Ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

3- Calculer t.

Solution

1- $N({}^{40}K)$ initiale:

$= N({}^{40}K)restant + N({}^{40}Ar)formé$

2- $N_0({}^{40}K) = \frac{m_1}{M}N_A + \frac{m_2}{M}N_A$

La loi de désintégration du potassium 40 est: $N(K) = N_0(K).e^{-\lambda t}$

Ou encore: $N_0(K) = N(K).e^{\lambda t}$

Or: $N(K) = \frac{m_1}{M}N_A$

$$N_0({}^{40}K) = \frac{m_1}{M}.N_1.e^{\lambda t}$$

En identifiant (1) et (2):

$$\frac{m_1}{M}N_A.e^{\lambda t} = \frac{m_1}{M}N_A + \frac{m_2}{M}N_A$$

$$m_1.e^{\lambda t} = m_1 + m_2$$

$$e^{\lambda t} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

$$\lambda t = Ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

$$t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{Ln2}Ln\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

3-

$$t = \frac{1,3.10^9}{Ln2}Ln\left(\frac{2,9800.10^{-3} + 8,6.10^{-6}}{2,9800.10^{-3}}\right)$$

$$\simeq 5,4.10^6 ans$$

15 On s'intéresse dans cet exercice à une filiation radioactive mettant en jeu deux noyaux radioactifs A et B. Le but de l'exercice étant d'observer l'évolution temporelle des populations A et B.

A, le noyau «père», se désintègre pour donner le noyau «fils» B. Ce noyau «fils» B lui-même radioactif, se désintègre pour donner le noyau «petit-fils» C, noyau considéré stable. Si on appelle λ_A et λ_B les constantes de désintégration radioactive respectives des éléments A et B, on a le schéma suivant:

$$A \xrightarrow{\lambda_A} B \xrightarrow{\lambda_B} C$$

A la date $t = 0$ l'échantillon étudié n'est constitué que de noyaux radioactifs A et on vérifie: $N_A(0) = N_0$

1- Donner l'expression de l'évolution temporelle de la population de noyaux A, $N_A(t)$, en fonction de N_0 et λ_A.

On donne l'équation différentielle vérifiée par $N_B(t)$ le nombre de noyaux B à

Scanned with CamScanner

l'instant t dans l'échantillon étudie (on ne s'intéressera pas au pourquoi de cette équation): $\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = -\frac{dN_A}{dt}$

2- Montrer que la solution suivante vérifie bien cette équation différentielle:

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

3- Déterminer la date t_{max} pour laquelle le nombre de noyaux radioactifs B est maximal dans l'échantillon.

4- Que vaut la somme $N_A(t) + N_B(t) + N_C(t)$ quelle que soit la date t considérée? En déduire l'expression littérale de $N_C(t)$.

5- Que vaut $N_C(t)$ lorsque le temps t tend vers l'infini? Ne pouvait-on pas prévoir ce résultat?

Solution

1- Il s'agit ici de la loi de décroissance radioactive bien connue. On écrira donc:

$$N_A(t) = N_0 e^{-\lambda_A t}$$

2- Vérifions l'égalité des deux membres de cette équation différentielle:

Le premier terme vérifie:

$$\frac{dN_B}{dt} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 (\lambda_B e^{-\lambda_B t} - \lambda_A e^{-\lambda_A t})$$

Le second:

$$\lambda_B N_B(t) = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

La somme de ces deux termes donne après simplification:

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 e^{-\lambda_A t} - \frac{\lambda_A^2}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 e^{-\lambda_A t}$$

Puis en factorisant:

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} (\lambda_B - \lambda_A) N_0 e^{-\lambda_A t} = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t}$$

Ecrivons alors le second terme de l'équation différentielle:

$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t}$ soit:

$$\left(-\frac{dN_A}{dt}\right) = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t}$$

L'égalité est donc bien vérifiée. La solution proposée est donc bien solution de l'équation différentielle étudiée.

3- Il suffit de chercher la date $t = t_{max}$ pour laquelle la dérivée de $N_B(t)$ s'annule; l'expression de cette dérivée a déjà été donnée dans la question précédente:

$$\left(\frac{dN_B}{dt}\right)_{t=t_{max}} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 (\lambda_B e^{\lambda_B t_{max}} - \lambda_A e^{-\lambda_A t_{max}}) = 0$$

On est donc ramené à résoudre l'équation:

$$\lambda_B e^{-\lambda_B t_{max}} - \lambda_A e^{-\lambda_A t_{max}} = 0$$

$$\lambda_B e^{-\lambda_B t_{max}} = \lambda_B e^{-\lambda_A t_{max}} ;$$

et: $\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{e^{-\lambda_A t_{max}}}{e^{-\lambda_B t_{max}}} = e^{t_{max}(\lambda_B - \lambda_A)}$

Finalement: $t_{max} = \frac{1}{\lambda_B - \lambda_A} In\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\right)$

4- Le nombre de noyaux radioactifs reste constant dans l'échantillon malgré les différentes désintégrations. La grandeur N_0 doit donc se conserver et on alors:

$$N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) = N_0$$

L'expression de $N_C(t)$ s'écrit donc:

$$N_C(t) = N_0 - N_A - N_A(t) - N_B(t)$$

$$N_C(t) = N_0 - N_0 e^{\lambda_A t} - \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

$$N_C(t) = N_0 - N_0 e^{-\lambda_A t} - \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} N_0 (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

$$N_C(t) = N_0 \left(1 - \left(\frac{2\lambda_A - \lambda_B}{\lambda_A - \lambda_B}\right) e^{-\lambda_A t} + \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B}\right) e^{-\lambda_B t}\right)$$

5- Lorsque le temps tend vers l'infini, les deux exponentielles dans l'expression précédente tendent vers zéro et on a alors:

$$N_C(t \longrightarrow \infty) = N_0$$

L'échantillon n'est alors constitué que de noyaux C, résultat attendu dans la mesure où les noyaux A et B se désintègrent successivement pour arriver au noyau C.

Scanned with CamScanner

5 NOYAUX ATOMIQUES: MASSE-ÉNERGIE

I- Équivalence masse-énergie

1 Principe d'équivalence:

En 1905, Einstein a postulé le principe d'équivalence entre masse et énergie:

Une particule matérielle, même au repos, du seul fait de sa masse, possède une énergie nommée «énergie de masse».

L'énergie de masse E d'une particule de masse m suite à la fameuse relation d'einstein:

$E = mc^2$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

2 Variation de la masse:

Lorsque la masse d'un système au cours d'un transformation, telle que les transformation nucléaires de Δm, alors cette variation s'accompagne d'un échange d'énergie avec le milieu extérieur dont la valeur est: ΔE

$\Delta E = \Delta m.c^2$

Lorsque la masse du système diminue ($\Delta m < 0$) le système libère de l'énergie ($\Delta E < 0$). Dans le cas inverse, lorsque $\Delta E > 0$, la transformation nécessite un apport extérieur d'énergie, la masse du système augmente.

3 Unités utilisées:

Dans cette formule, la masse est exprimée en unité de masse atomique (u) et l'énergie en MeV (méga électron-volt).

$1u = 1,66.10^{-27}kg$; $1MeV = 1,6.10^{-13}J$; $1u = 931,5MeV.c^{-2}$

Exemple: Si $\Delta m = -4u$, alors:

$\Delta E = \Delta m.c^2 = -4u.c^2 = -4.931,5MeV.c^{-2}.c^2 = -372,6MeV$

4 Défaut de masse d'un noyau:

On constate que la masse du noyau est toujours inférieure à la somme des masses de ses constituants pris individuellement:

Pour un noyau ${}^A_ZX$ on a:

$m({}^A_ZX) < Zm_p + (A-Z)m_n$

On appelle défaut de masse de noyau, la différence.

$\Delta m = Zm_p + (A+Z)m_n - m({}^A_ZX)$

Exemple: calculons le défaut de masse du noyau de fer ${}^{56}_{26}Fe$

On donne: $m({}^{56}_{26}Fe) = 55,9207u$; $m_p = 1,00728u$; $m_n = 1,00866u$

$\Delta m = m(nucléons) - m(noyau)$

$= 26m_p + 30m_n - m({}^{56}_{26}Fe)$

$= 26.1,00728 + 30.1,00866 - 55,9207 = 0,52838u$

5 Énergie de liaison:

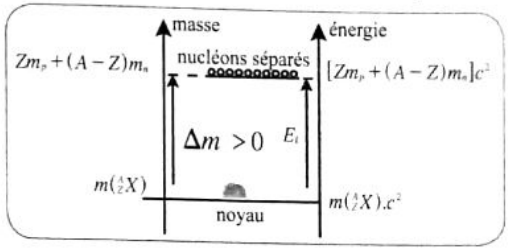
5.1- Définition:

L'énergie de liaison du noyau, que l'on note E_ℓ, est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau pris au repos pour le dissocier en ses différents nucléons isolés et au repos.

5.2- Expression:

$E_\ell = \Delta m.c^2$

Δm: défaut de masse du noyau.



5.3- énergie de liaison par nucléon:

On la définit par: $\mathscr{E} = \frac{E_\ell}{A}$

Plus $\mathscr{E}$ est grande, plus la cohésion dans le noyau est grande, plus il est stable.

Exemple : Reprenons l'exemple du nucléide de ${}^{56}_{26}Fe$.

Son défaut de masse est $\Delta m = 0,52838u$, alors

$E_\ell = \Delta m.c^2 = 0,52838u.c^2$

$= 0,52838.931,5MeV.c^{-2}.c^2$

$= 492,18MeV$

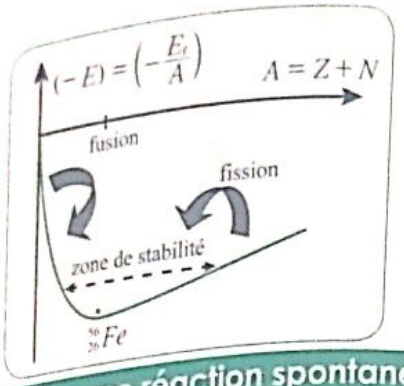
$\mathscr{E} = \frac{E_\ell}{A} = 8,8 \simeq MeV/nucléon$

5.4- Courbe d'Aston:

Elle est représentée par les variations de $\left(-\mathscr{E} = \frac{-E_\ell}{A}\right)$ en fonction A.

- Les noyaux moyens sont les plus stables. En dehors de cette zone de stabilité, les noyaux légers et les noyaux lourds ont une énergie de liaison par nucléon plus faibles que les noyaux moyens.
- Les noyaux légers peuvent entrer en fusion pour donner des noyaux plus stables.
- Les noyaux lourds peuvent se fissionner pour donner des noyaux plus stables.

Scanned with CamScanner



II- Énergie produite par une réaction spontanée

1 Exemple: Considérons la désintégration d'équation:

$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$

On donne: $m(^4_2He) = 4,0015u$; $m(^{210}Po) = 209,9368u$; $m(^{206}Pb) = 205,9295_u$

$1u = 931,5MeV.c^{-2}$

L'énergie ΔE de cette réaction est:

$\Delta E = \Delta m.c^2 = [m \text{ (produits)} - m \text{ (réactifs)}]\ c^2$

$\Delta m = m \text{ (finale)} - m \text{ (initiale)}$

$= m(Pb) + m(\alpha) - m(Po)$

$= 205,9295 + 4,0015 - 205,9368 = -0,0058u$

Donc $\Delta E = -0,0058.931,5 = -5,4MeV$

$\Delta E < 0$ donc cette réaction donne de l'énergie au milieu extérieur.

Chaque noyau de polonium désintégré libère une énergie qui vaut:

$E = |\Delta E| = 5,4MeV$

2 Généralisation:

Toutes les réactions spontanées α, β et β^+ libèrent de l'énergie ($\Delta E < 0$).

3 Bilan énergétique - diagramme d'énergie:

Considérons l'exemple précédent: $^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He$

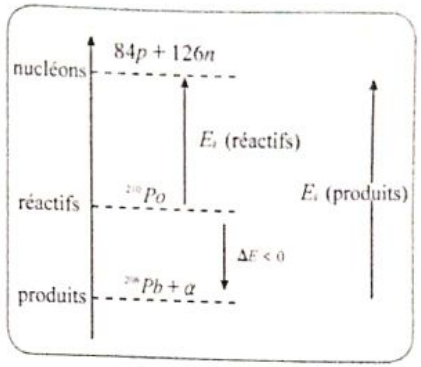
Avant d'atteindre l'état final, on peut imaginer que le système passe par un état intermédiaire instable formé de nucléons.

$^{210}Po \xrightarrow{\text{Q}} \vdots\vdots \xrightarrow{\text{Q}} Pb + {}^{4}_{2}He$

Cette représentation permet d'introduire l'énergie de liaisons des réactifs et celles des produits de la réaction.

L'énergie qui correspond à l'étape (1) est $E_\ell(Po)$ et celle qui correspond à l'étape (2) est l'opposé d'une énergie de liaison.

Utilisons donc le diagramme énergétique ci-contre.



D'après ce diagramme on a:

E_ℓ (produits) $= E_\ell$ (réactifs) $+(-\Delta E)$

d'où $\Delta E = E_\ell$ (réactifs) $- E_\ell$ (produits)

Dans le cas de l'exemple étudié:

$\Delta E = E_\ell(^{210}Po) - [E_\ell(^{206}Pb) + E_\ell(^4_2He)]$

On encore

$\Delta E = 210\mathscr{E}_\ell(Po) - 206\mathscr{E}_\ell(Pb) - 4\mathscr{E}_\ell(\alpha)$

En résumé: Pour une réaction spontanée (α, β^- et β^+) modélisée par: $X \longrightarrow Y_1 + Y_2$ où Y_2 représente la particule α, β^- ou β^+; on peut calculer l'énergie de la réaction en utilisant:

- soit la variation de la masse: $\Delta E = \Delta m.c^2$, avec: $\Delta m = m(Y_1) + m(Y_2) - m(X)$;
- soit les énergies de liaisons: $\Delta E = E_\ell(X) - [E_\ell(Y_1) + E_\ell(Y_2)]$

III- Réactions nucléaires provoquées

1 La fission nucléaire:

1.1- La fission nucléaire est une réaction nucléaire provoquée en bombardant un noyau lourd fissile (fissible) par un neutron appelé neutron thermique. ou neutron lent. Il en résulte deux noyaux relativement moyens.

1.2- Réalisation de la fission

Les noyaux fissibles utilisés à nos jours sont deux: $^{235}_{92}U$ et $^{239}_{94}Pu$.

- L'uranium $^{235}_{92}U$, qui est un isotope naturel présent dans les minerais d'uranium avec un pourcentage de 0,7% contre 99,3 de $^{238}_{92}U$ noyau non fissible.
- Le plutonium $^{239}_{94}Pu$, c'est un noyau artificiel qu'on prépare à partir de l'uranium $^{238}_{92}U$ (voir exercice 5).

1.3- Equations de la fission nucléaire

la fission de l'uranium 235 donne lieu a plus de trente réactions différentes.

L'équation d'une fission nucléaire vérifie la loi de Soddy et l'énergie libérée est $\Delta E = \Delta m.c^2$.

Scanned with CamScanner

1.4- Exemple:

Exercice d'application

L'isotope 235 d'uranium est noyau fissile. Bombardé par un neutron, il peut donner lieu à la réaction de fission suivante: $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2^{1}_{0}n$.

Données:

Particule	$^{235}_{92}U$	$^{140}_{54}Xe$	$^{94}_{38}Sr$	$^{1}_{0}n$
Masse (en u)	234,9935	139,8920	93,8945	1,0087

a- Calculer la variation de masse Δm associée à cette réaction nucléaire.

b- En déduire l'énergie de réaction ΔE.

c- S'agit-il d'une réaction exothermique, endothermique ou athermique?

d- Représenter le bilan d'énergie en utilisant un diagramme d'énergie.

e- En déduire l'expression de l'énergie ΔE en fonction des énergies de liaisons des noyaux mis en jeu.

Solution

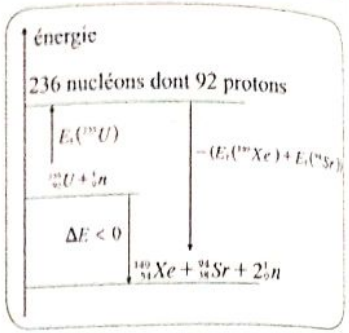
a- La variation de masse au cours de la réaction est égale à:

$\Delta m = m(^{140}Xe) + m(^{94}Sr) + m(^{1}_{0}n) - m(^{235}U)$

soit $\Delta m = -0,1983u$ ou encore

b- $\Delta m = \Delta m.c^2 = -0,1983.931,5$

$= 184,72MeV$



c- $\Delta E < 0$: la réaction est donc exothermique (libère de la chaleur)

d- Le diagramme d'énergie ci-contre montre que les produits de la réaction ont une énergie de masse inférieure à celle des réactifs. L'état d'énergie le plus élevé correspond aux nucléons séparés.

e- $-[E_l(Xe) + E_l(Sr)] = \Delta E - E_l(U)$, on rappelle que $E_l(^{1}_{0}n) = 0$

d'où: $\Delta E = E_l(U) - [E_l(Xe) + E_l(Sr)]$

$\Delta E = \sum E_l$ (réactifs) $- \sum E_l$ (produits)

1.5- La fission en chaine:

Les neutrons éjectés par la fission du premier noyau ^{235}U peuvent également initier d'autres fissions et ainsi de suite.

Ce phénomène est appelé réaction en chaîne et conduit à une augmentation très rapide de l'énergie libérée sous forme de chaleur.

- Dans les centrales nucléaires la fission en chaîne est contrôlée.
- Lorsque la fission n'est pas contrôlée, elle devient explosive, c'est le principe de la bombe atomique (bombe A).

II Fusion nucléaire:

2.1- Définition:

une fusion nucléaire est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle deux noyaux légers sont unis pour donner un noyau plus lourd.

Exemple: $^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$

2.2- Conditions de réalisation:

Pour vaincre la répulsion entre les noyaux réactifs, chargés positivement, et permettre leur collision, il faut:

- Une température proche de $10^8 °C$.
- Une pression très forte de la matière à fusionner.

Remarque:

Dans les étoiles comme le soleil, l'agitation thermique importante due à une température de plusieurs millions de degrés favorise les réactions de fusion nucléaire.

Bilan énergétique:

Parmi les fusions qui se font au sein du soleil, on trouve la réaction d'équation:

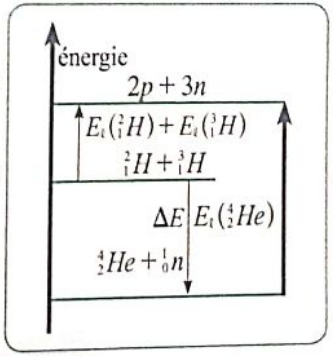
$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$

L'énergie ΔE de cette réaction est:

$\Delta E = \Delta m.c^2 = [m(^4He) + m(^1_0n) - m(^2H) - m(^3H)].c^2$;

on encore: $\Delta E = E_l(^{2}_{1}H) + E_l(^{3}_{1}H) - E_l(^{4}_{2}He)$;

Cette énergie de l'ordre de $17MeV$, est négligeable devant celle libérée par une fission ($180MeV$), mais, ramenées au nombre de nucléons dans les réactifs: (5 pour la fusion et 236 pour la fission) la fusion libère environ 5 fois plus d'énergie que la fission.



Scanned with CamScanner

Exercices

1 On considère le nucléide $^{56}_{26}Fe$ qui est l'isotope le plus important du fer.

On donne: $m(^{56}_{26}Fe) = 55,9349u$; $m(^{1}_{1}p) = 1,0073u$; $m(^{1}_{0}n) = 1,0087u$;

$1u = 931,5MeV.c^{-2}$

1- Donnez la composition du noyau de fer 56.

2- Donnez l'équation de décomposition de ce noyau en ses constituants.

3- Calculez le défaut de masse lié à cette décomposition.

4- En déduire l'énergie mise en jeu lors de cette décomposition.

5- Calculez l'énergie de liaison par nucléon pour cet isotope.

6- Cet élément est-il stable?

Solution

1- Le nucléide $^{56}_{26}Fe$ contient 56 nucléons (nombre de masse A) dont 26 protons (nombre de chargez Z). On détermine le nombre de neutrons par la relation:

$N = A - Z = 56 - 26 = 30$ neutrons.

Le fer 56 contient 26 protons et 30 neutrons.

2- D'après les informations de la première question, on peut écrire :

$^{56}_{26}Fe \longrightarrow 26\,^{1}_{1}p + 30\,^{1}_{0}n$

3- Le défaut de masse se détermine par :

$\Delta m = [26 \times 1,0073 + 30 \times 1,0087] - 55,9349$

$= 0,5159u$

Le défaut de masse lié à cette décomposition est $\Delta m = 0,5159u$

4- Le défaut de masse est déterminé en unité de masse atomique. On calcule l'énergie en MeV par la relation:

$\Delta E = \Delta m \times 931,5$

$= 0,5159 \times 931,5$

$= 480,6MeV$

Le défaut de masse liée à cette décomposition est $\Delta E = 480,6MeV$.

5- L'énergie de liaison par nucléon se calcule par:

$\frac{E_l}{A} = \frac{480,6}{56} = 8,58MeV/nucléon$

6- Cette valeur est l'une des plus grandes relevées sur la courbe d'Aston, donc le fer 56 est très stable.

2 On considère le noyau de deutérium $^{2}_{1}H$ de masse $m = 2,01345u$.

Données : $1u = 1$ unité de masse atomique $= 1,6605.10^{-27}kg$, masse du proton: $m_p = 1,007276u$; masse du neutron : $m_n = 1,008665u$.

1- Calculer son défaut de masse. Exprimer le résultat en unités de masse atomique, puis en kilogrammes.

2- En déduire son énergie de liaison (en MeV), puis son énergie de liaison par nucléon.

3- L'énergie de liaison par nucléon du tritium $^{3}_{1}H$ est de $0,610MeV$. Le noyau de tritium est-il plus stable que le noyau de deutérium?

Solution

1- $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m$,

$= 1m_p + (2 - 1)m_n - m$

$= 2,491.10^{-3}u$

soit en kg : $\Delta m = 4,136.10^{-30}kg$.

2- $E_l = \Delta m.c^2$

$= 2,481.10^{-3}u.c^2$

$= 2,491.10^{-3}.931,5$

$= 2,327MeV$

Le noyau de deutérium contient 2 nucléons.

L'énergie de liaison par nucléon et donc:

$E(^{2}_{1}H) = \frac{E_l(^{2}_{1}H)}{2} = \frac{2,327}{2}$

$E(^{2}_{1}H) \simeq 1,16MeV/nucléon$

3- L'énergie de liaison par nucléon est plus élevée pour le noyau de deutérium que pour le noyau de tritium. Le noyau de deutérium est donc plus stable que le noyau de tritium.

3 On considère les trois noyaux de bore suivants : $^{8}_{5}B$, $^{10}_{5}B$ et $^{11}_{5}B$.

1- Compléter le tableau suivant:

Noyau	$^{8}_{5}B$	$^{10}_{5}B$	$^{11}_{5}B$
Défaut de masse		$6,752.10^{-2}$	
Masse (u)			
Énergie de liaison (MeV)			75,06
Énergie de liaison par nucléon (MeV)	3,76		

On donne: $m_p = 1,00827u$; $m_n = 1,00866u$ et $1u = 931,5MeV.c^{-2}$

2- Classer ces trois noyaux par ordre de stabilité croissante.

Solution

1-

Noyau	$^{8}_{5}B$	$^{10}_{5}B$	$^{11}_{5}B$
Défaut de masse (u)	$3,229.10^{-2}$	$6,752.10^{-2}$	$8,058.10^{-2}$
Masse (u)	8,035	10,017	11,013
Énergie de liaison (MeV)	30,08	62,90	75,06
Énergie de liaison par nucléon (MeV)	3,76	6,29	6,82

2- Les noyaux les plus stables ont des énergies de liaison par nucléon les plus fortes, les noyaux suivants sont classés du moins stable au plus stable : $^{8}_{5}B$, $^{10}_{5}B$ et $^{11}_{5}B$.

Scanned with CamScanner

4 Lors du fonctionnement d'une centrale nucléaire, un neutron initie la fission d'un noyau d'uranium 235. On obtient du tellure 138, du zirconium et trois nucléons identiques.

$m(^{1}_{0}n) = 1,0087u$; $m(^{235}_{92}U) = 235,044u$;

$m(^{1}_{1}p) = 1,0073u$;

$m(^{138}_{52}Te) = 137,901u$

$m(^{A}_{40}Zr) = 94,9077u$; $1u = 931,5MeV.c^{-2}$.

1- Ecrire l'équation de cette réaction en déterminant A et en identifiant les nucléons obtenus.

2- Déterminez la variation de masse puis l'énergie mise en jeu.

3- Quelle énergie peut-on libérer si on utilise $1g$ d'uranium 235, soit $2,55.10^{21}$ radio éléments? On donnera la réponse en MeV puis en J.

4- Une tonne équivalent pétrole (tep) libère une énergie de $4,2.10^{10}J$. Combien de tep libère $1g$ d'uranium 235?

Solution

1- A partir des informations de l'énoncé, on a:

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{138}_{52}Te + ^{A}_{40}Zr + 3(^{1}_{Z}X)$$

$$\begin{cases} 1 + 235 = 138 + A + 3 \times 1 \\ 0 + 92 + 52 + 40 + Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 95 \\ Z = 0 \end{cases}$$

Le nucléon est donc un neutron. Finalement l'équation de la transformation est:

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{138}_{52}Te + ^{95}_{40}Zr + 3^{1}_{0}n$$

2- La variation de masse se détermine par:

$\Delta m = [m(Te) + m(Zr) + 3 \times m(^{1}_{0}n)] - [m($

$\Delta m = [137,901 + 94,9077 + 3 \times 1,0087] - [1,0087 + 235,044]$

$= -0,218u$

L'énergie mise en jeu par cette transformation se détermine par:

$\Delta E = \Delta m.c^{2} = -0,218 \times 931,5 = -203MeV$

La fission d'un noyau ^{235}U libère $203MeV$.

3- Puisque $1g$ d'uranium 235 contient $2,55.10^{21}$ radio éléments, l'énergie libérée par cette masse est :

$E = 2,55.10^{21} \times (203) = 5,99.10^{23}MeV$

Cette énergie exprimée en MeV donne en J :

$E = 5,99.10^{23} \times 1,602.10^{-13} = 9,60.10^{10}J$

L'énergie libérée par la fission de $1g$ d'uranium 235 est de $5,99.10^{23}MeV$ soit $9,60.10^{10}J$.

4- La conversion de cette énergie en tep s'écrit: $E = \dfrac{9,60.10^{10}}{4,2.10^{10}} = 2,3tep$.

5 Dans une centrale nucléaire à eau pressurisée, le combustible est de l'oxyde d'uranium enrichi à 4% environ en uranium 235 fissile. L'isotope 238 néanmoins présent à 96% n'est pas fissile mais fertile car il donne naissance à un noyau fissile, le plutonium 239, suite à la capture d'un neutron rapide et à deux désintégrations β^{-}.

La transmutation de l'uranium 238 est toute fois moins fréquente dans un réacteur à neutrons lents que dans un surgénérateur, dans lequel les neutrons ne sont pas ralentis.

a- D'où proviennent les neutrons capturés par l'uranium 238?

b- En utilisant la classification périodique, écrire l'équation de la capture d'un neutron rapide par le noyau d'uranium 238 puis celle des désintégrations β qui se succèdent jusqu'au plutonium 239.

c- Écrire l'équation d'une fission du plutonium, donnant naissance à du tellure 135 et à du molybdène 102. On donne: $_{93}Np$; $_{52}Te$ et $_{42}Mo$.

Solution

a- Les neutrons capturés, par l'uranium 238 proviennent de la fission de l'uranium 235.

b-
$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{239}_{92}U$$
$$^{239}_{92}U \longrightarrow ^{239}_{93}Np + ^{0}_{-1}e$$
$$^{239}_{93}Np \longrightarrow ^{239}_{94}Pu + ^{0}_{-1}e$$

c-
$$^{239}_{94}Pu + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{139}_{52}Te + ^{102}_{42}Mo + 3(^{1}_{0}n)$$

6 Soit la réaction: $^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{91}_{36}Kr + ^{A}_{Z}Ba + 3^{1}_{0}n$

1- Déterminer les valeurs de A et Z.

2- Pourquoi n'a-t-on pas simplifié par $^{1}_{0}n$ chaque terme de l'équation?

- S'agit-il d'une réaction spontanée ou provoquée? De quel type? La représenter sur la courbe d'Aston.

- A priori, où se produit cette réaction? Centrale nucléaire, soleil...

3- Calculer la variation de masse Δm de cette réaction en u; en déduire l'énergie ΔE de cette réaction. En déduire l'énergie libérée $E_{lib} = |\Delta E|$

Données: $m(^{1}_{0}n) = 1,009u$; $m(^{235}U) = 235,044u$; $m(^{91}_{36}Kr) = 90,923u$; $m(^{A}_{Z}Ba) = 141,916u$; $1u = 931,5MeV.c^{-2}$.

4- Faire un schéma énergétique de la réaction faisant apparaître les énergies de liaisons (E_l); en déduire l'expression de l'énergie ΔE en fonction de E_l de chaque élément, et préciser pourquoi $E_l(^{1}_{0}n) = 0MeV$.

5- En déduire l'énergie de liaison par nucléon $\mathscr{E}$ pour le krypton-91

Données:

Nucléide	$^{235}_{92}U$	$^{A}_{Z}Ba$
$\mathscr{E}$ en MeV par nucléon	7,59	8,31

Scanned with CamScanner

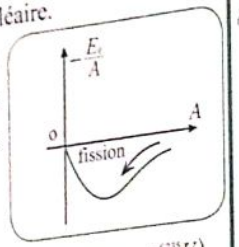
Solution

1- $Z = 56$, $A = 142$

2- Si on simplifie le neutron de gauche, l'équation se présente comme celle d'une réaction spontanée.

C'est une réaction provoquée; il s'agit d'une fission nucléaire.

Cette réaction se produit dans les centrales nucléaires.



3-

$\Delta m = (^{90}Kr) + m(^{142}Ba) + 3m_n - m_n - m(^{235}U)$

$\Delta m = 90,923 + 141,916 + 2.1,009 - 235,044$

$= -0,187u$

$\Delta E = \Delta m.c^2 = -0,87.931,5 = -174,2MeV$

$E_{lib} = |\Delta E| = 174,2MeV$

4- Le neutron n'est lié à aucun autre nucléon, donc $E_l(^1_0n) = 0$.

5- Diagramme ci-contre

$E_l(K) + E_l(Ba) = E_l(U) - \Delta E$

$\Delta E = E_l(U) - E_l(K) - E_l(Ba)$

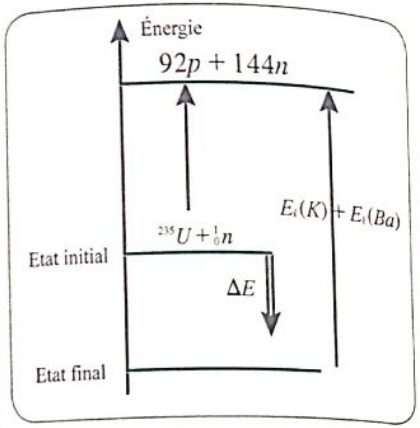
$E_l(Kr) = E_l(U) - E_l(Ba) - \Delta E$

$\mathcal{E}(Kr) = \frac{E_l(Kr)}{A} = \frac{E_l(Kr)}{91}$

$\mathcal{E}(Kr) = \frac{1}{91}[235.\mathcal{E}(U) - 14\mathcal{E}(Ba) - \Delta E]$

$= \frac{1}{91}[235.7,59 - 142.8,31 + 174,2]$

$= 8,547MeV/nucléon$



7 On donne les équations de réactions nucléaires suivantes:

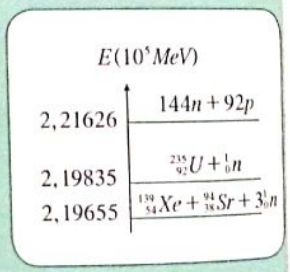
A	$^2_1H + ^3_1H \longrightarrow ^4_2He + ^1_0n$
B	$^{60}_{27}Co \longrightarrow ^{60}_{28}Ni + ^0_{-1}e$
C	$^{238}_{92}U \longrightarrow ^4_2He + ^{234}_{90}Th$
D	$^{235}_{92}U + ^1_0n \longrightarrow ^{139}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 3^1_0n$

1- Donner le type de chacune de ces réactions.

2- En utilisant le digramme énergétique représenté ci-contre, Calculer:

2.1- L'énergie de liaison par nucléon dans le noyau $^{235}_{92}U$

2.2- L'énergie $|\Delta E|$ libérée par la réaction D.



Solution

1-

A: réaction de fusion nucléaire

B: désintégration β^-

C: désintégration α

D: fission nucléaire

2.1-

$E_l = [m(nucléons) - m(noyau)].c^2$

$= E(nucléons) - E(noyau)$

$E_l = (2,21625 - 2,19835).10^5$

$= 1790MeV$

$\mathcal{E} = \frac{E_l}{A} = \frac{1790}{235}$

$\mathcal{E} \simeq 7,62MeV/nucléon$

2.2-

$\Delta E = E(produits) - E(réactifs)$

$= (2,19655 - 2,19835).10^5$

$= 180MeV$

8 Un mode de fission de l'uranium 235 dans un réacteur nucléaire peut se schématiser par l'équation - bilan suivante: $^{235}_{92}U + ^1_0n \longrightarrow ^{148}_{57}La + ^{85}_{35}Br + 3^1_0n$.

1- Donner l'expression de la variation de masse du système au cours de la fission. En déduire l'expression de l'énergie de réaction ΔE.

2- Montrer que l'on a aussi: $\Delta E = [E_l(^{235}_{92}U)] - [E_l(^{148}_{57}La) + E_l(^{85}_{35}Br)]$ où E_l désigne une énergie de liaison nucléaire.

3- Calculer la valeur de ΔE connaissant les énergies de liaison suivantes: $E_l(^{235}_{92}U) = 1785,89MeV$, $E_l(^{148}_{57}La) = 1210,21MeV$ et $E_l(^{85}_{35}Br) = 733,81MeV$.

4- En déduire en kJ l'énergie $|\Delta Em|$ libérée par 1mole de noyau fissions. Comparer cette valeur à l'énergie de combustion du carbone ($390kJ.mol^{-1}$). On donne: $1MeV = 1,6.10^{-13}J$

Solution

1- La variation de masse au cours de la réaction nucléaire étudiée s'écrit:

$\Delta m = (m_{La} + m_{Br} + 3m_n) - (m_U + m_n)$

On a : $\Delta E = \Delta mc^2$, soit

$\Delta E = [(m_{La} + m_{Br} + 3m_n) - (m_U + m_n)]c^2$

2- On note Δm le défaut de masse d'un noyau. On écrit:

$m_{La} = 57m_p + 91m_n - \Delta m_{La}$.

De même: $m_{Br} = 35m_p + 50m_n - \Delta m_{Br}$ et $m_U = 92m_p + 143m_n - \Delta m_U$

Alors: $\Delta E = [\Delta m_U + \Delta m_{La} - \Delta m_{Br}]c^2$

$\Delta E = [E_l(^{235}_{92}U)] - [E_l(^{148}_{57}La) + E_l(^{85}_{35}Br)]$

3- L'application numérique donne:

$\Delta E = -158,12MeV$

4- Pour une mol d'uranium fissioné:

$|\Delta E_m| = N_A \times |\Delta E|$

$|\Delta E_m| = 9,52.10^{25}MeV.mol^{-1}$

soit: $\Delta E_m = 1,52.10^{10}kJ.mol^{-1}$

Cela représente près de 40 millions de fois l'énergie molaire de combustion du carbone!

Scanned with CamScanner

9 L'équation de la fusion nucléaire entre un noyau de deutérium ${}^{2}_{1}H$ et un noyau de trithium ${}^{3}_{1}H$ s'écrit:

$${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{1}_{0}n$$

1- Compléter cette équation en identifiant le noyau formé.

2- On peut extraire $33mg$ de deutérium à partir de $1,0L$ de l'eau de mer.

Calculer, en MeV, la valeur absolue de l'énergie que l'on peut obtenir à partir de la fusion du trithium et du deutérium extrait de $1m^3$ de l'eau de mer.

Données:

$m({}^{2}_{1}H) = 2,01355u$; $m({}^{3}_{1}H) = 3,01550u$

$m({}^{1}_{0}n) = 1,00866u$; $m(\alpha) = 4,00150u$

$1u = 931,5MeV.c^{-2}$; $1u = 1,66.10^{-27}kg$.

Solution

1- On a $Z = 2$ et $A = 4$, il s'agit de la particule $\alpha = {}^{4}_{2}He$

2- Calculons l'énergie de fusion d'un noyau ${}^{2}_{1}H$ et un noyau ${}^{3}_{1}H$.

$\Delta E = [m({}^{1}_{0}n) + m({}^{4}_{2}H) - m({}^{2}_{1}H) - m({}^{3}_{1}H)]c^2$

$\Delta E = [1,00866 + 4,00150 - 2,01355 - 3,01550]c^2$

$\Delta E = -0,01889.u.c^2 \simeq -17,6MeV$

Soit N le nombre de noyaux ${}^{2}_{1}H$ contenus dans un $1m^3$ de l'eau de mer.

$E = N|\Delta E|$

le nombre N_1 de ${}^{2}_{1}H$ dans $1L$ est:

$N_1 = \dfrac{m_1}{m({}^{2}_{1}H)}$; $m_1 = 33mg$

Dans $1m^3$ on a $N = 10^3 N_1$

$N = 10^3.\dfrac{m_1}{m({}^{2}_{1}H)} = \dfrac{10^3.33.10^{-6}}{2,01355.1,66.10^{-27}}$

$N \simeq 9,87.10^{24} noyaux$

$E = N|\Delta E| \simeq 1,74.10^{26}MeV$

10 Une des réactions de fonctionnement d'un coeur de réacteur a pour équation:

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{93}_{36}Kr + {}^{140}_{58}Ba + n{}^{A}_{Z}X$$

Particule	${}^{235}_{92}U$	${}^{93}_{36}Kr$	${}^{140}_{56}Ba$	${}^{1}_{0}n$
Masse en u	235,0440	92,9312	139,9106	1,0087

1- De quel type de transformation nucléaire s'agit-il? Déterminer la particule X émise.

2- Montrer que l'énergie libérée E_0 par cette transformation vaut $E_0 \simeq 172MeV$.

3- Quelle énergie en J peut-on libérer au maximum en utilisant une masse de $1kg$ d'uranium 235? $1u = 1,66.10^{-27}kg$; $1MeV = 1,602.10^{-13}J$.

4- Dans une centrale classique, on dispose de barres de contrôle permettant d'ajuster la quantité moyenne de neutrons se déplaçant dans le coeur du réacteur.

4.1- Pourquoi doit-on ajuster le nombre de neutrons dans le coeur?

4.2- Montrer que si les barres de contrôle ne sont plus dans le coeur, l'énergie après la $n^{ième}$ transformation suit une loi du type: $E_n = E_0 \times 3^n$.

4.3- Calculer l'énergie libérée lorsque $n = 50$. Comparer cette énergie avec l'énergie libérée par $1kg$ d'uranium 235.

4.4- Quelle application militaire utilise cette propriété?

Solution

1- La réaction proposée est une réaction de fission nucléaire car les noyaux-fils sont plus légers que le noyau-père.

Pour déterminer la particule X, on utilise les lois de conservation, dites lois de Soddy, du nombre total de masse et du nombre total de charges.

${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{93}_{36}Kr + {}^{140}_{53}Ba + n{}^{A}_{Z}X$

$\begin{cases} 235 + 1 = 93 + 140 + nA \\ 92 = 36 + 56 + nZ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} nA = 3 \\ nZ = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} nA = 3 \\ nZ = 0 \end{cases}$

La seule particule dont le nombre de charges est nul est le neutron. On en déduit que le nombre $n = 3$.

L'équation s'écrit donc finalement:

${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{93}_{36}Kr + {}^{140}_{56}Ba + 3{}^{1}_{0}n$

2- Calculons d'abord la variation de masse dite à cette transformation

$\Delta m = [m({}^{93}_{36}Kr) + m({}^{140}_{58}Ba) + 3m({}^{1}_{0}n)] - [m({}^{235}_{92}U) + m({}^{1}_{0}n)]$

$\Delta m = [92,9312 + 139,9106 + 3 \times 1,0087] - [235,0440 + 1,0087]$

$\Delta m = -0,1848u$

L'énergie libérée se détermine par la relation: $\Delta E = \Delta m.c^2$

$E = -0,1848 \times 931,5$

$\Delta E < 0$, il y a libération d'énergie:

$E_0 = -\Delta E = 172,1MeV$

3- On détermine dans un premier temps le nombre d'atomes d'uranium 235 contenus dans l'échantillon de $m = 1kg$ de noyaux ${}^{235}U$.

$m = N.m$ (noyau)

$N = \dfrac{m}{m({}^{235}_{92}U)}$

$= \dfrac{1}{235,044u}$

$= \dfrac{1}{235,044.1,66.10^{-27}}$

$N \simeq 2,563.10^{24}$

L'énergie libérée par ce nombre d'atomes d'uranium 235 se détermine par:

$E = N.E_0$

$E = 2,563.10^{24} \times 172,1 \times 1,602.10^{-13}$

$E = 7,066.10^{13}J$

L'énergie libérée par $1kg$ d'uranium 235 est donc: $E = 7,066.10^{13}J$.

4.1- L'équation de la transformation montre que la réaction est initiée par un neutron mais qu'elle produit également 3 neutrons. Ces neutrons peuvent alors engendrer 3 nouvelles transformations et ainsi de suite. C'est le principe de la réaction en chaîne. Pour éviter ce problème, il convient de limiter la quantité de neutrons.

La chaleur produite par ces réactions en chaîne peut entraîner, si les fissions ne sont pas contrôlées, une élévation excessive

Scanned with CamScanner

de la température pouvant atteindre des dizaines de milliers de degrés en quelques minutes.

4.2- Le premier noyau fissionné libère l'énergie E_0 avec éjection de trois neutrons.

étape 1: chacun de ces neutrons entraîne une fission d'énergie E_0 trois neutrons éjectés.

étape 2: L'énergie de cette étape est:

$E_1 = 3E_0$

étape 2: $E_2 = 3E_1 = 3^2.E_0$

étape 3: $E_3 = 3E_2 = 3^3.E_0$

étape n: $E_n = 3E_{n-1} = 3^n.E_0$

4.3- On applique la relation précédente, ce qui donne:

$E_{50} = E_0 \times 3^{50} \Longrightarrow E_{50}$

$= 172,1 \times 1,602.10^{-13} \times 3^{50}$

$E_{50} = 1,979.10^{13} J$

Au bout de 50 réactions successives, l'énergie libérée est de $1,979.10^{13} J$.

Cette énergie représente entre 1/3 et 1/4 de l'énergie libérée par $1kg$ d'uranium 235.

4.4- L'énergie est obtenue très rapidement puisqu'il ne suffit que d'environ 50 cycles. Il y a donc une très grande énergie libérée en peu de temps ce qui est utilisé par les militaires pour la constitution de bombes atomiques.

11 ***Fusion nucléaire au coeur du soleil***

L'énergie solaire a notamment pour origine la réaction nucléaire de fusion de l'hydrogène en hélium.

Cette synthèse de l'hélium se fait suivant la chaîne de réactions nucléaires suivantes:

(1) ${}_1^1H + {}_1^1H \longrightarrow {}_Z^AX + {}_1^0e$

(2) ${}_1^1H + {}_Z^AX \longrightarrow {}_Z^{A'}Y$

(3) $2\,{}_Z^{A'}Y \longrightarrow {}_2^4He + 2\,{}_1^1H$

1- Déterminer A, Z, A', Z' en énonçant les lois de conservation utilisées.

2- A partir du tableau suivant, identifier les noyaux ${}_Z^AX$ et ${}_Z^{A'}Y$:

${}^1H$	${}^2He$	${}^3Li$	${}^4Be$

La puissance émise par le soleil, supposée constante, est $P_s = 3,9.10^{23} kW$.

3- En admettant que l'énergie libérée par les réactions de fusion nucléaire est intégralement rayonnée par le soleil, calculer, en tonnes, la perte de masse du soleil par seconde.

4- La masse su soleil est de l'ordre de $1.99.10^{30} kg$. On évalue son âge à 4,6 milliards d'années. Quelle masse a-t-il perdue depuis qu'il rayonne? Quelle fraction de sa masse actuelle cela représente-t-il?

Données: Célérité de la lumière $c = 3.10^8 m.s^{-1}$.

Solution

1- On détermine Z en utilisant la loi de conservation de la charge électrique totale:

$1+1 = Z+1$, soit $Z = 1$.

De même pour ${}_1^1H + {}_Z^AX \longrightarrow {}_Z^{A'}Y$:

$1+A = A'$, soit $A' = 3$

$1+Z = Z'$, soit $Z' = 2$

2- On a ${}_Z^AX = {}_1^2H$ et ${}_Z^AY = {}_2^3He$.

3- Pendant une durée Δt, l'énergie rayonnée par le soleil est $\Delta E = P_s \Delta t$.

La perte de masse correspondante est:

$\Delta m = \dfrac{\Delta E}{c^2} = \dfrac{P_s \Delta t}{c^2}$

La perte de masse par unité de temps est donc:

$\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{P_s}{c^2} = 4,3.10^9 kg.s^{-1}$, ce qui correspond à 4,3 millions de tonnes par seconde.

4- En notant T l'âge du Soleil et en supposant la puissance rayonnée constante, on peut écrire que la masse perdue par le soleil depuis qu'il rayonne est:

$\Delta m = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} T = 6,2.10^{26} kg$.

Cela représente $0,03\%$ de sa masse actuelle.

12 Le réaction d'une centrale nucléaire fonctionne à l'aide de l'uranium enrichi constitué d'un mélange de $P = 3\%$ de l'uranium ${}^{235}U$ fissible et de $P' = 97\%$ de l'uranium ${}^{238}U$ non fissible.

P et P' sont des pourcentages massiques.

L'énergie thermonucléaire dans ce réacteur est produite par la réaction suivante:

${}_0^1n + {}_{92}^{235}U \longrightarrow {}_{38}^{94}Sr + {}_{54}^{140}Xe + 2\,{}_0^1n$

Donnés: $m({}^{140}Xe) = 139,8920u$; $m({}^{94}Sr) = 93,8945u$; $m({}^{235}U) = 234,9935u$

$m({}_0^1n) = 1,0087u$; $1MeV = 1,6.10^{-13} J$; $1u = 1,66.10^{-27} kg = 931,5 MeV.c^{-2}$.

Avec un rendement $r = 25\%$, cette centrale fournit une puissance électrique moyenne $P_e = 295MW$.

1- Calculer en MeV et en Joule, l'énergie nucléaire $|\Delta E_0|$ libérée par la fission de $m_0 = 1g$ de ${}^{235}U$.

2- Montrer que la masse m d'uranium enrichi, consommée par le réacteur pendant une durée $\Delta t = 24h$ peut s'écrire: $m = \dfrac{m_0 P_e . \Delta t}{r.P.|\Delta E_0|}$.

Calculer m.

Solution

1- Calculons d'abord l'énergie $|\Delta E|$ libérée par la fission d'un seul noyau ${}^{235}U$.

$\Delta E = \Delta m.c^2 [m(Sr) + m(Xe) + 2m_n - m({}^{235}U) - m_n].c^2$

$= -0,1983u.c^2$

$= -184,7MeV$

L'énergie libérée par un échantillon contenant $m_0 = 1g$ de noyaux ${}^{235}U$ contenant N_0 de ces noyaux est:

$|\Delta E_0| = N_0.|\Delta E| = \dfrac{m_0}{m({}^{235}U)}.|\Delta E|$ (1)

Scanned with CamScanner

$$|\Delta E_0| = \frac{1.10^{-3}}{234,9935.1,66.10^{-27}}.184,7$$
$$= 4,73.10^{-13} MeV$$
$$= 7,57.10^{-10} J$$

2- La centrale transforme l'énergie nucléaire E_n produite en énergie électrique E_e avec un rendement $r = 25\%$, cela veut dire que $E_e = r.E_n$ (2).

- En utilisant la puissance P_e, on a:

$E_e = P_e.\Delta t$.

- On exprime E_n de la manière suivante:

$$E_n = N|\Delta E|$$
$$= \frac{m(235)}{m(^{235}U)}.|\Delta E|$$
$$= \frac{m(235)}{m_0}.|\Delta E_0|$$

$m(235)$: masse des noyaux ^{235}U consommés.

$m(235) = p.m$, m: masse du mélange.

En combinant ces relations l'expression (2) donne:

$$P_e.\Delta t = r.\frac{p.m}{m_0}|\Delta E_0|$$

d'où: $m = \frac{m_0.P_e.\Delta t}{r.p.|\Delta E_0|}$

Application numérique:

$$m = \frac{1.10^{3}.295.10^{6}.24.3600}{0,25.3.10^{-2}.7,57.10^{10}} \simeq 44,9kg$$

13 Le noyau d'oxygène $^{15}_{8}O$ se désintègre pour donner l'azote $^{A}_{7}N$.

1- Ecrire l'équation de cette réaction, en identifiant son type.

2- La figure ci-contre représente le digramme d'énergie de cette réaction.

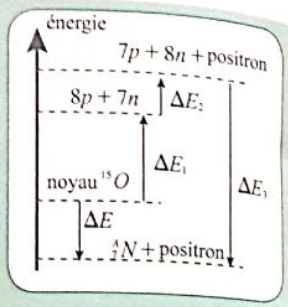
2.1- Définir l'énergie de liaison d'un nucléide.

2.2- Calculer en MeV la variation d'énergie ΔE_1 figurant sur ce diagramme.

2.3- Calculer ΔE en MeV.

Données: $1u = 1,66.10^{-27}kg = 931,5MeV.c^{-2}$;

$1MeV = 1,6.10^{-13}J$



Particule	*proton*	*neutron*
Masse u	$m_p = 1,00727$	$m_n = 1,00867$

Noyau	$^{15}_{8}O$	$^{A}_{7}N$
Energie de liaison par nucléon en MeV / nucléon	$\mathscr{E}_1 = 7,463$	$\mathscr{E}_2 = 7,699$

Solution

1- $^{15}_{8}O \longrightarrow {}^{A}_{7}N + {}^{0}_{1}e$; désintégration de type β^+

2.1- L'énergie de liaison d'un noyau notée E_l est l'énergie qu'il faut fournir à ce noyau pris au repos pour le dissocier en ses différents nucléons obtenus isolés et au repos.

2.2- La masse de $^{15}_{8}O$ n'est pas fournie par l'énoncé, on ne peut donc pas utiliser la formule $\Delta E = \Delta m.c^2$, pour calculer ΔE_1.

En revenant à la définition de E_l, on remarque que $\Delta E_1 = \mathscr{E}(^{15}_{8}O)$.

$\Delta E_1 = 15\mathscr{E}_1 = 111,945MeV$

2.3- D'après le diagramme d'énergie on peut écrire:

$\Delta E_3 = \Delta E + (-\Delta E_1) + (-\Delta E_2)$

d'où: $\Delta E = \Delta E_3 + \Delta E_1 + \Delta E_2$

ΔE_3 représente: $-E_l(^{A}_{7}N)$

$$\Delta E_2 = \Delta m.c^2 = [m(7p+8n) - m(8p+7n)]c^2$$
$$= (m_n - m_p).c^2$$
$$= 1,3041MeV$$

donc: $\Delta E = -E_l(^{15}_{7}N) + E_l(^{15}_{8}O) + \Delta E_2$

$\Delta E = -15\mathscr{E}_2 + 15\mathscr{E}_1 + \Delta E_2$

$\Delta E = 15(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) + \Delta E_2$

$= 15(7,463 - 7,699) + 1,3041$

$= -2,234MeV$

14 La sonde spatiale Cassini envoyée dans l'espace en 1997 par la *N.A.S.A*, recevait très peu de lumière du soleil pour l'alimenter en électricité par des photopiles. La source d'électricité utilisée était une pile nucléaire, de longue durée de vie, qui convertit en énergie électrique, l'énergie produite par la désintégration α du plutonium $^{238}_{94}Pu$ en uranium $^{234}_{92}U$.

La demi-vie de cette désintégration est $t_{\frac{1}{2}} = 88ans$

Données:

$m(^{238}_{94}Pu) = 238,1257u$

$m(^{A}_{Z}U) = 234,1153u$

$m(\alpha) = 4,0015u$

$1u = 931,5MeV.c^{-2}$

$1eV = 1,6.10^{-19}J$

1- Ecrire l'équation de la désintégration produite dans la pile nucléaire de Cassini.

2- Calculer en MeV et en Joule, l'énergie E_l libérée lors de la désintégration d'un noyau de plutonium-238.

3- La pile contient N_0 noyaux de plutonium-238 à la date $(t = 0)$ date de sa mise en fonctionnement.

Scanned with CamScanner

La puissance nucléaire de cette pile à la date $t = 0$ est $P_0 = 5kW$.

3.1- Exprimer le nombre de noyaux de plutonium disparus à la date t, et noté N_d en fonction de N_0, λ et t.

3.2- Montrer que l'énergie E libérée par la quantité de plutonium désintégrée à la date t est: $E = N_0 E_1(1 - e^{-\lambda t})$.

3.3- La puissance nucléaire instante est définie par $P = \frac{dE}{dt}$.

Calculer la puissance de la pile de plutonium après 22ans de son fonctionnement.

Solution

1- ${}^{238}_{94}Pu \longrightarrow {}^{234}_{92}U + {}^{4}_{2}He$

2- $\Delta m = m(U) + m(\alpha) - m(Pu)$

$= 234,1153 + 4,0015 - 238,1257$

$= -8,9.10^{-3}u$

$\Delta E = \Delta m.c^2 = -8,29MeV$

$E_1 = |\Delta E| = 8,29MeV = 1,326.10^{-12}J$

3.1- On a d'après la loi de désintégration

$N = N_0.e^{-\lambda t}$

$N_d = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$

3.2- L'énergie E_1 est produite à chaque fois qu'un noyau disparaît.

$E = N_d.E_1 = N_0E_1(1 - e^{-\lambda t})$

3.3-

$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}[N_0E_1(1 - e^{-\lambda t})] = N_0E_1\lambda e^{-\lambda t}$

Le nombre N_0 étant inconnu, remarquons qu'à la date $t = 0$, on a $P_0 = N_0E_1\lambda$; d'où

$P(t) = P_0.e^{-\lambda t} = P_0.e^{-Ln2\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}}$

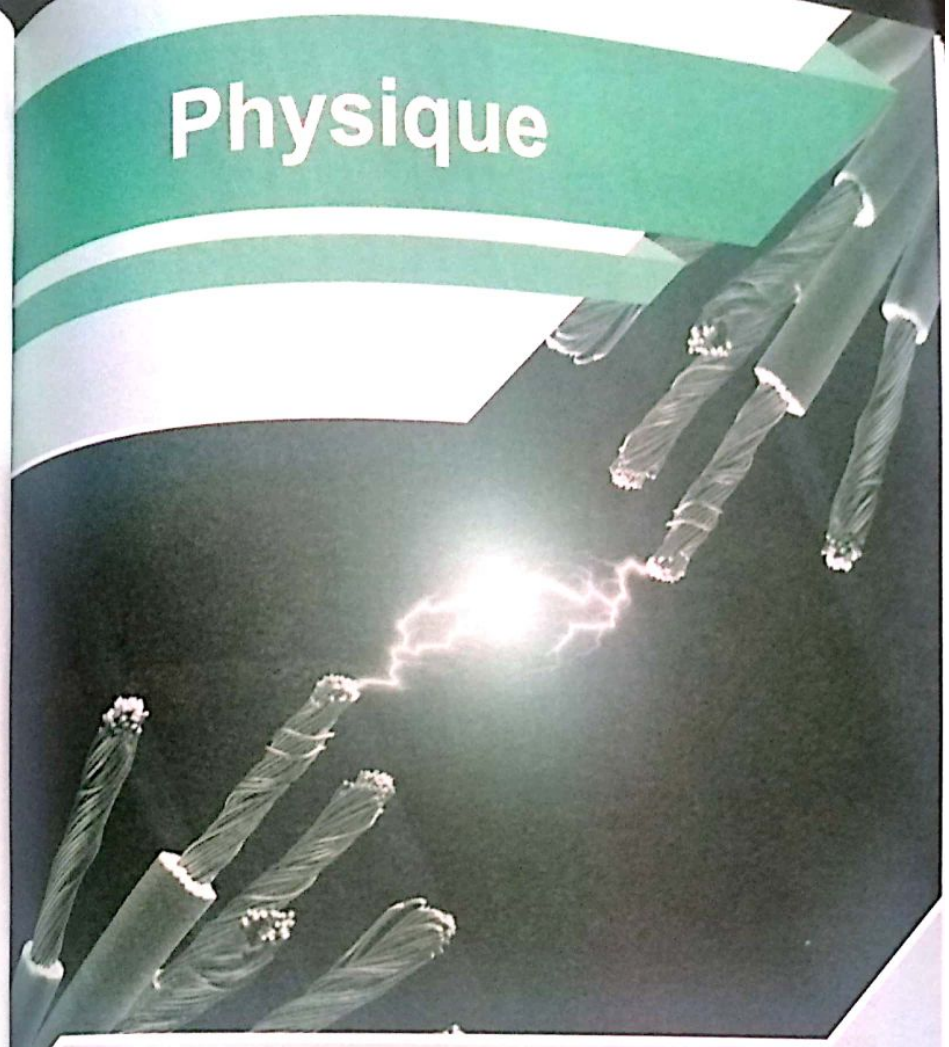
A la date $t = 22ans$

$p(t) = P_0.e^{-Ln2\frac{t}{t_{\frac{1}{2}}}} = P_{0e^{-Ln2\frac{1}{4}}}$

$= 0,84.P_0$

$= 4,2kW$

Physique



ELECTRICITE

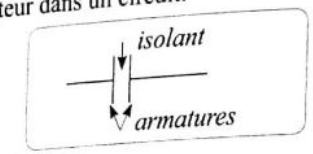
Scanned with CamScanner

6 DIPOLE RC

I- Le condensateur:

1 Description et symbole d'un condensateur:

- Un condensateur est un dipôle électrique constitué de deux surfaces conductrices en regard appelées armatures, séparées par un isolant appelé diélectrique.
- Symbole d'un condensateur dans un circuit:



2 Charge d'un condensateur:

Au cours de la charge du condensateur (figure-1), le sens de la circulation des électrons est opposé à celui du courant électrique.

Au moment où un certain nombre d'électrons arrive sur l'armature B, le même nombre d'électrons quittent l'armature A, suite à une électrisation par influence. Il apparaît donc le même nombre de charges positives sur l'armature A.

Les charges électriques portées par les deux armatures A et B sont à chaque instant égales et de signes opposés $(q_A = -q_B)$.

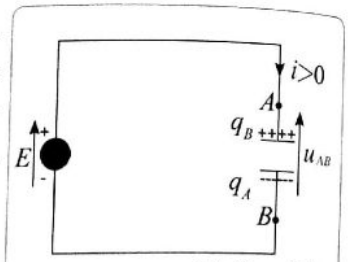


Fig 9, p.110

La valeur absolue commune de ces deux charges notée q est appelée charge électrique du condensateur.

$|q_A| = |q_B| = q$; q en coulomb de symbole (C).

Remarque:

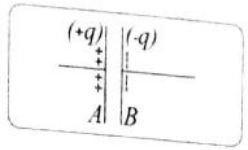
La charge q est liée au nombre N de charges élémentaires accumulées par chaque électrode.

Si par exemple $q = 6,4.10^{-4} C$, alors; le nombre N est:

$$N = \frac{q}{e} = \frac{6,4.10^{-4}}{1,6.10^{-19}} = 3,2.10^{15} charges$$

3 Relation charge-intensité de courant:

Le courant électrique représente le débit de circulation des charges électriques. Si à une date t, l'armature A accumule la charge q; à la date $(t + \Delta t)$ elle accumulera la charge $(q + \Delta q)$.

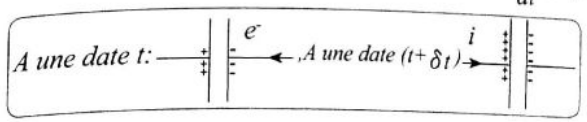


Pendant la durée Δt, sa charge varie de Δq et l'intensité moyenne du courant pendant cette durée est: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

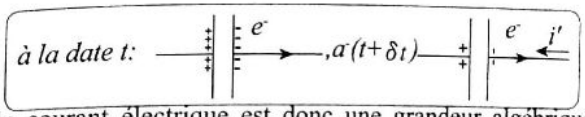
Lorsque $\Delta t \to 0$; l'intensité du courant tend vers une valeur limite appelée intensité instantanée du courant et définie par: $i = \frac{dq}{dt}$.

Deux cas se présentent:

1er cas: Si q croît avec le temps, le condensateur se charge: $i = \frac{dq}{dt} > 0$.



2ème cas: Si q décroît, le condensateur se décharge, alors: $i' = \frac{dq}{dt} < 0$

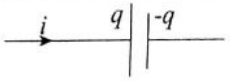


- L'intensité du courant électrique est donc une grandeur algébrique (positive ou négative).

Dans un même circuit, un condensateur peut se charger et se décharger. On choisit en général, un sens unique du courant électrique, en orientant le circuit en donnant à i un sens conventionnel.

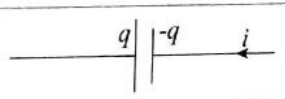
1er cas:

$$i = \frac{dq}{dt}$$



2ème cas:

$$i = -\frac{dq}{dt}$$



cas général:

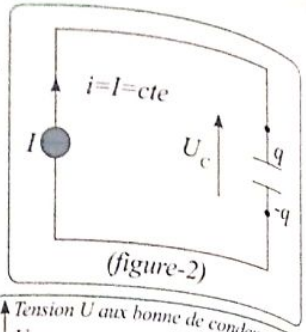
$$i = \frac{dq_M}{dt}$$

L'intensité du courant est égale à la dérivée par rapport au temps de la charge de l'armature à laquelle arrive la flèche du courant conventionnel choisi dans le circuit.

Scanned with CamScanner

4 Relation charge-tension:

L'étude expérimentale de la charge d'un condensateur à l'aide d'un générateur idéal de courant.



(figure-2)

fig (2) nous permet de déduire que: (1): $u_{AB} = f(t)$ est linéaire, alors $u_C = u_{AB} = a.t$

Or, $\frac{dq}{dt} = i = I_0$ (constante)

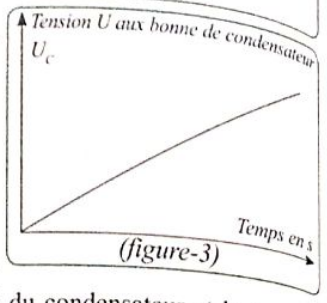
Alors, $q = I.t + cte$

condition initiale de: q à $t = 0$, $q = 0$, car le condensateur est initialement déchargé, donc: $cte = 0$.

D'où la relation $q = I.t$ (2).

On déduit en conbinant (1) et (2) que:

$\frac{q}{I} = \frac{u_C}{a}$, alors: $q = \frac{I}{a}.u_C = cte.u_C$



(figure-3)

La constante de proportionnalité entre q et u_C est caractéristique du condensateur. On l'appelle: capacité du condensateur et la symbole par C. $q = C.u_C$

La valeur de la capacité d'un condensateur dépend de ses caractéristiques internes: surface des armatures, la distance qui les sépare et la nature de l'isolant.

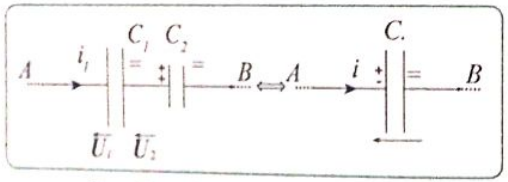
Dans le système international des unités, l'unité de la capacité C est le farad de symbole (F).

$1F = \frac{1C}{1V}$ ← Coulomb ← Volt

5 Association de condensateurs:

5.1- Association en série:

La loi d'addictivité des tensions permet d'écrire:



$u = u_1 + u_2$, c'est-à-dire: $\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$

Les trois condensateurs sont traversés par le même courant et par conséquent, ils accumulent la même charge pendant la même durée.

C'est-à-dire: $q_1 = q_2 = q$

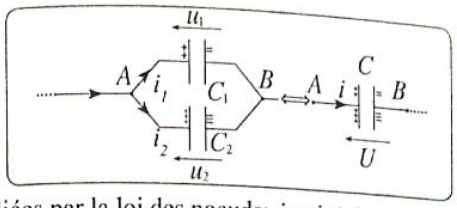
$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

On généralise ce résultat pour plusieurs condensateurs et on écrit:

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... = \sum_i \frac{1}{C_i}$

5.2- Association en parallèle:

Ici, les tensions sont égales: $u_1 = u_2 = u$.



Les intensités sont liées par la loi des noeuds: $i = i_1 + i_2$

les charges accumulées par les trois condensateurs obéissent donc à la même relation: $q = q_1 + q_2$ ou encore: $CU = C_1U_1 + C_2U_2$.

Puisque $U = U_1 = U_2$, on déduit que: $C = C_1 + C_2$

généralisation: $C = \sum_i C_i$.

Exercice d'application 1

On considère deux condensateurs de capacités respectives:

$C_1 = 200\mu F$ et $C_2 = 300\mu F$.

1- Quelle est la capacité du condensateur équivalent lorsque ces deux condensateurs sont montés en parallèle puis en série?

2- En déduire l'intérêt de chaque association.

Solution

1- Capacité équivalente:

- Montage parallèle: $C = C_1 + C_2 = 500\mu F$.
- Montage série: $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_e = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ $C' = \frac{200.300}{200 + 300} = 120\mu F$

2- Intérêt:

- L'association série permet de diminuer la capacité de le condensateur dans un circuit.
- L'association parallèle permet d'augmenter la capacité, car: $C' < C_1$ et $C' < C_2$.

Scanned with CamScanner

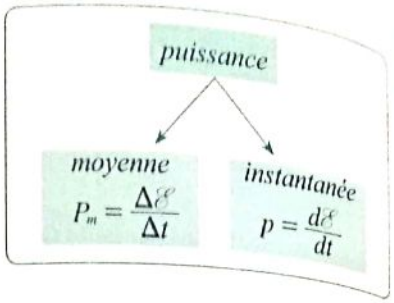
1 Energie emmagasinée par un condensateur :

La puisssance électrique instantée échangée par un dipôle et le circuit est: $p = u\,i$.

Dans le cas où ce dipôle est un condensateur, on a: $u = u_c$ et $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}$

Alors: $p = u_c.C.\frac{du_c}{dt} = C.u_c.\frac{du_c}{dt}$

D'autre part, la puissance électrique instantanée est liée à l'énergie électrique ξ_e par la relation: $p = \frac{d\xi_e}{dt}$



On a alors: $\frac{d\xi_e}{dt} = C.u_c.\frac{du_c}{dt}$

Quelle est donc l'expression de ξ_e, sachant que sa dérivée par rapport au temps est: $C.u_c.\frac{du_c}{dt}$? analogie mathématique:

$$g' = Cf'.f \Longleftrightarrow g = C.\frac{1}{2}.f^2 + cte$$

ξ_e est donc la fonction primitive de $C.u_c.\frac{du_c}{dt}$.

$\xi_e = \frac{1}{2}.C.u_c^2 + cte$.

La constante peut être déterminée par la condition initiale.

Si on considère que l'énergie emmagasinée par le condensateur est nulle lorsqu'il n'est pas chargé; c'est-à-dire: $\xi_e = 0$ lorsque $u_c = 0$.

Alors: $0 = \frac{1}{2}.C.0^2 + cte \rightarrow cte = 0$

D'où l'expression:

$$(J) \rightarrow \quad \xi_e = \frac{1}{2}.C.u_c^2 \quad \leftarrow (V)$$
$$\uparrow (F)$$

On peut aussi l'exprimer en fonction de la charge q. $\xi_e = \frac{1}{2}.C\left(\frac{q}{C}\right)^2 = \frac{1}{2C}q^2$.

Notons que cette énergie varie dans le temps au cours de la charge ou de la décharge du condensateur:

- Au cours de la charge, u_c croît donc ξ_e croit aussi avec le temps.

A la fin de la charge: $\xi_{e_{max}} = \frac{1}{2}Cu_{c_{max}}^2 = \frac{1}{2}CE^2$.

- Au cours de la décharge u_c décroît avec le temps, donc ξ_e décroît donc avant de s'annuler.

Exercice d'application 2

Un condensateur de capacité $C = 47\mu F$ stocke au cours de sa charge une énergie de $15,84mJ$ à une date t.

Quelle est à cette date la tension aux bornes de ses armatures?

Solution

On a: $\xi_e = \frac{1}{2}Cu_c^2$ alors: $u_c = \sqrt{\frac{2\xi_e}{C}}$ $(u_c > 0)$

$$u_c = \sqrt{2.\frac{15,84.10^{-3}}{220.10^{-6}}} = 12V$$

II- Le dipôle RC :

1 Réponse du dipôle RC à un échelon de tension croissante:

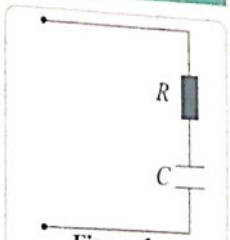


Figure-1

2.1- Définition du dipôle RC :

On appelle dipôle RC, le dipôle obtenu par l'association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R. figure (1)

2.2- Echelon de tension croissante:

La tension aux bornes du dipôle RC est u_{DB} figure (21).

- En circuit ouvert, on a: $u_{DB} = 0$.

- Lorsqu'on ferme le circuit à la date $t = 0$, la tension u_{DB} passe instantanément de 0 à la valeur E, ce saut subi par u_{DB} est appelé échelon de tension croissante figure (2).

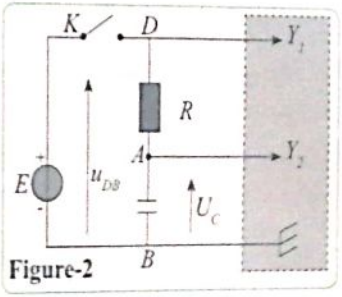


Figure-2

• Allure de la tension aux bornes du condensateur:

La figure (3).

La visualisation sur l'écran de l'oscilloscope (ou ordinateur) permet de voir l'évolution des deux tensions: $u_{DB} = E$ aux bornes du dipôle RC et $u_{DA} = u_c$ aux bornes du condensateur figure (4).

• Allure de la tension au borne du résistor:

En utilisant la loi d'additivité des tensions, on a: $u_{DB} = u_{DA} + u_{AB}$.

Scanned with CamScanner

C'est-à-dire: $E = u_R + u_C$ d'où: $u_R = E - u_C$ ou encore: $u_R(t) = E - u_C(t)$.

Or, $u_R = Ri$ (loi d'ohm).

$u_C(t)$ est croissante de 0 à E, donc $u_R(t)$ est décroisssante de E à 0.

L'intensité $i(t) = \frac{1}{R}u_R(t)$ a une allure semblable à celle de $u_R(t)$.

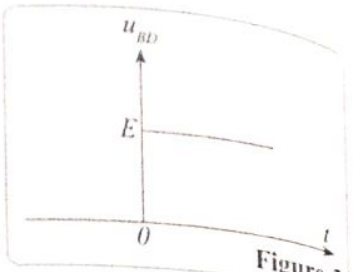


Figure-3

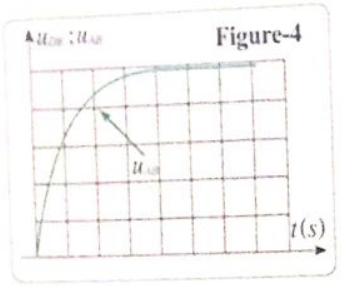


Figure-4

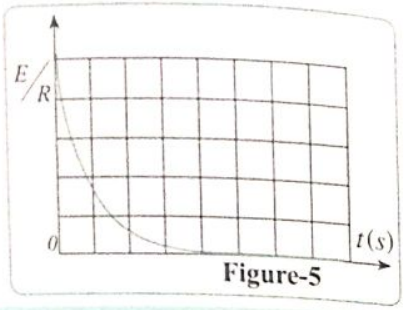


Figure-5

Remarque:

l'allure de $u_R(t)$ peut être visualisée à l'aide de l'oscilloscope.

2.1.3- Influence de R et C : (fig-6)

Les paramètres R et C agissent de la même façon sur l'évolution de $u_C(t)$.

Courbe (a) obtenue à: $C = 0,5\mu F$ et $R = 300\Omega$.

Courbe (b) obtenue avec: $C = 0,1\mu F$ et $R = 300\Omega$.

Courbe (c) obtenue avec: $C = 0,1\mu F$ et $R = 100\Omega$

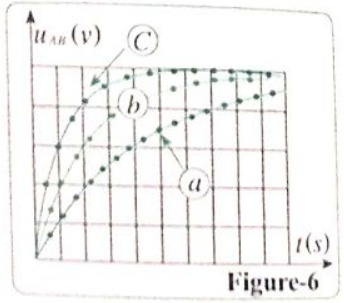


Figure-6

2.2- Etude théorique de la charge d'un condensateur:

2.2.1- Equation différentielle vérifiée par u_C.

La loi d'additivité des tensions permet d'écrire:

$$u_{GA} + u_{AB} = u_{GB} = E$$

$$u_C + u_R = E$$

On applique la loi d'ohm au conducteur ohmique, orienté en convention récepteur, $u_R = Ri$.

On a alors: $u_C + Ri = E$ (1)

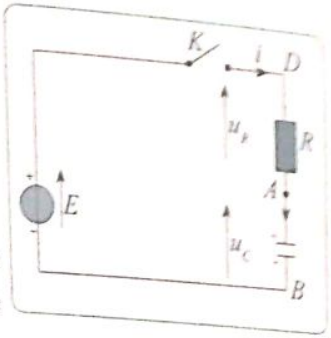
Exprimons l'intensité du courant en tenant compte de la convention du sens conventionnel choisi:

On a: $i = \frac{dq}{dt}$, or: $q = C.u_C$,

alors: $i = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

En revenant à la relation (1), on a donc:

$$u_C + RC.\frac{du_C}{dt} = E$$



- Cette expression est appelée équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$, comme étant une fonction inconnue.

- Le terme "différentielle" est dû au fait, que cette équation contient la dérivée de la fonction à chercher, dans ce cas, c'est la tension $u_C = f(t)$.

Les constantes R, C et E représentent les paramètres du circuit étudié.

2.2.2- Solution de l'équation différentielle:

On montre en mathématiques que la solution de cette équation différentielle est: $u_C(t) = A.e^{-\alpha t} + B$, où A, B et α des constantes dépendant des constantes. Pour les déterminer on utilise les étapes suivantes:

- La fonction $u_C(t)$ vérifie l'équation différentielle:

Exprimons la dérivée de $u_C(t)$: $\frac{du_C}{dt} = -A.\alpha.e^{-\alpha t}$.

En remplaçant dans l'équation différentielle: $u_C + RC.\frac{du_C}{dt} = E$

$Ae^{-\alpha t} + B + RC(-A.\alpha.e^{-\alpha t}) = E$;

$Ae^{-\alpha t}(1 - RC.\alpha) = E - B$

Les termes deux $(1 - RC.\alpha)$ et $(E - B)$ sont constants, alors que le terme $(e^{-\alpha t})$ est variable.

L'égalité dans cette expression ne peut être vérifiée que si ces deux termes constants soient nuls.

C'est-à-dire: $E - B = 0$ et $1 - RC.\alpha = 0$

Ce qui donne: $B = E$ et $\alpha = \frac{1}{RC}$.

- La solution $u_C(t)$ doit vérifier les conditions initiales du circuit:

• Le condensateur est initialement non chargé, alors: $u_C(0) = 0$

En appliquant cette condition à l'expression de $u_C(t)$,

On écrit: $u_C(0) = A.e^{-\alpha t} + B = 0$

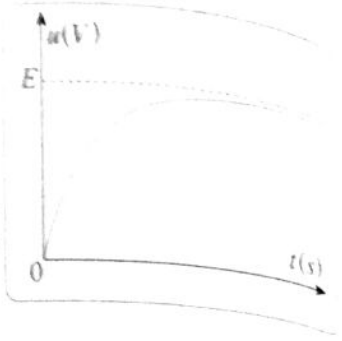
Ou: $A + B = 0$, alors: $A = -B = -E$

Scanned with CamScanner

D'où: $u_c(t) = -Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

- En résumé, la tension $u_c(t)$ s'exprime comme suit:

$$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Signalons que la tension augmente beaucoup plus vite au début de la charge, puis, plus lentement avant d'atteindre une valeur limite: $u_c(\infty) = E$.

Remarque:

les deux conditions aux limites à $(t = 0)$ et lorsque $(t \to +\infty)$ donnent:

- 1ère condition: $u_c(0) = 0 = A + B$

- 2ème condition: $u_c(t \to \infty) = E$.

lorsque $t \to +\infty$ ou $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$ alors $u_c(\infty) = \lim_{t \to \infty} u_c(t) = B$, d'où: $B = E$.

- L'expression de α peut être obtenue en remplaçant u_C et sa dérivée dans l'équation différentielle.

2.2.3- Constante de temps du dipôle RC:

- Remarquons que dans l'expression de u_c, le rapport $\frac{1}{RC}$ n'a pas d'unité, le produit RC a donc la dimension d'un temps.

- Ce résultat peut être également remarqué dans l'équation différentielle où la grandeur $\frac{du_c}{dt}$ est en $\frac{V}{s}$.

• Définition: On appelle constante de temps d'un dipôle RC, la durée $\tau = R.C$.

• Vérification de sa dimension.

$$[\tau] = [R][C] = \frac{[U]}{[I]} \cdot \frac{[q]}{[U]} = \frac{[I][\Delta t]}{[I]} = [\Delta t]$$

• Détermination graphique de la valeur τ:

1ère méthode: utilisation de la tangente à la date $t = 0$.

La tangente à la courbe de $u_c(t)$ à la date $t = 0$, coupe l'asymptote horizontale $(u_c = E)$ au point M d'abscisse t_M.

Le coefficient directeur K de cette tangente a pour expression fig (1).

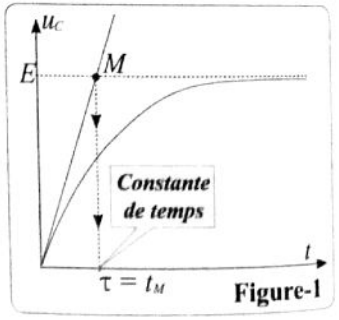


Figure-1

$K = \frac{du_c}{dt} = \frac{E - 0}{t_M - 0} = \frac{E}{t_M}$

Or, ce coefficient n'est autre que la valeur de la dérivée de $u_c(t)$ à la même date $t = 0$

En effet, $u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} \to \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

A $t = 0$, on a: $\left(\frac{du_c}{dt}\right)_0 = \frac{E}{\tau}e^{-0} = \frac{E}{\tau}$

Identifions donc les deux valeurs de K:

$K = \frac{E}{t_M} = \frac{E}{\tau}$, d'où: $t_M = \tau$.

Deuxième méthode: utilisation de la courbe de $u_c(t)$ à la date $t = \tau$,

$u_c(\tau) = E(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E$ sur la fig on lit la valeur τ abscisse correspondant à $u_c = 0,63E$.

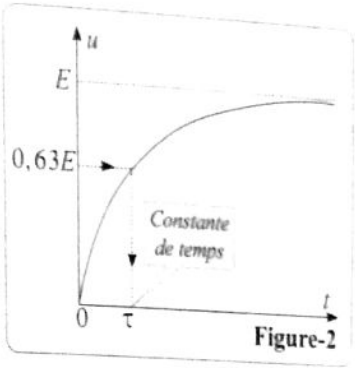
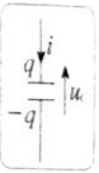


Figure-2

2.2.4- Nature du courant électrique:

D'après la convention choisie, on a: $i = \frac{dq}{dt}$ et avec $q = C.u_c$, on obtient: $i = C.\frac{du_c}{dt}$.



Or: $u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, alors: $\frac{du_c}{dt} = \frac{E}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}$; Donc: $i = \frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Soit, en tenant compte de l'expression de la constante de temps,

$i = \frac{CE}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

La constante de temps $\tau = RC$ de ce circuit peut être également tirée en exploitant la grandeur $i(t)$:

- Soit en utilisant la tangente à $(t = 0)$.

- Soit en utilisant l'expression de $i(t)$.

$i(t = \tau) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,37I_0$.

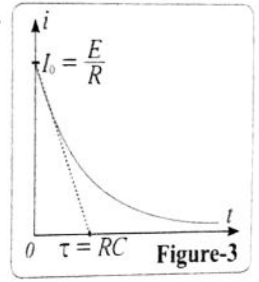


Figure-3

Remarque:

On peut montrer que l'intensité $i(t)$ vérifie l'équation différentielle $i + RC\frac{di}{dt} = 0$.

Scanned with CamScanner

Exercice d'application 3

On charge un condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur dont la tension est constante $E = 12V$.

Au cours de cette opération, la tension u_c aux bornes du condensateur s'exprime par: $u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

On donne $\tau = RC = 20ms$ et $R = 200\Omega$.

1- Quelle est la valeur de C ; en (F) et en (μF)?

2- Quelles valeurs prend u_c aux dates suivantes $t_1 = \tau$; $t_2 = 2\tau$ et $t_3 = 5\tau$?

3- Que peut on conclure?

Solution

1- $C = \frac{\tau}{R} = \frac{20.10^{-3}}{200} = 10^{-4}F = 100\mu F$.

2- $u_c(t_1) = E(1 - e^{-1}) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E$

$u_c(t_2) = E(1 - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}) = E(1 - e^{-2}) = 0,86E$

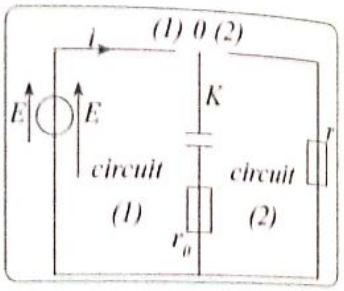
$u_c(t_3) = E(1 - e^{-5}) = 0,993E \simeq E$

3- On peut conclure que le condensateur est pratiquement totalement chargé à partir de la date $t = 5\tau$.

2.3- Circuit RC soumis à un échelon de tension décroissante:

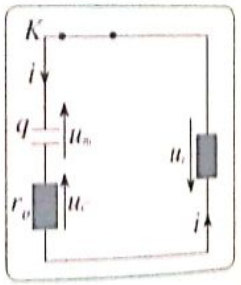
2.3.1- Equation différentielle vérifiée par la tension u_c :

Considérons le montage de la figure ci-contre.



Dans une première étape, realisons la charge du condensateur en basculant l'interrupteur à la position (1) et gardons ce circuit de charge fermé quelques secondes pour obtenir la charge quasi totale du condensateur $(u_c = E)$.

A une nouvelle date prise comme origine des temps $(t = 0)$, on bascule K à la position (2) et on observe à l'aide du voltmètre ou oscilloscope que la tension u_c subit une chute de sa valeur initiale E, à une valeur nulle. On dit que le condensateur se décharge à travers le conducteur ohmique équivalent au circuit (2) et de résistance équivalente $(R = r_0 + r)$.



- On représente le circuit de cette décharge et on garde le même sens conventionnel du courant utilisé dans le circuit de charge (cirduit 1).

Dans ce cas, la loi d'additivité des tensions permet d'écrire, $u_c + u_{r_0} + u_r = 0$

C'est-à-dire: $u_c + r_0 i + ri = 0$

ou encore: $u_c + Ri = 0$

En utilisant les expressions $i = \frac{dq}{dt}$ et $q = C.u_c$.

Il vient, $i = \frac{d}{dt}(C.du_c) = C.\frac{du_c}{dt}$.

Alors: $u_c + RC.\frac{du_c}{dt} = 0$

2.3.2- Solution de l'équation différentielle et expression de la tension $u_c(t)$.

La solution de l'équation différentielle obtenue se présente souvent sous la forme:

$u_c(t) = Ae^{-\alpha t}$ ou $u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

- Exprimons α et τ en fonction des paramètres du circuit.

Remplaçons l'expression de $u_c(t)$ et de sa dérivée dans l'équation différentielle:

$Ae^{-\alpha t} + RC(-\alpha A)e^{-\alpha t} = 0$; $Ae^{-\alpha t}[1 - RC.\alpha] = 0$

Pour que cette expression s'annulle à n'importe quelle date t, avec un terme constant et non nul qui est: $(e^{-\alpha t})$, il faut que:

$1 - RC\alpha = 0$, c'est-à-dire: $\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

$\tau = RC$: constante de temps du circuit de décharge du condensateur.

Remarque:

le circuit de décharge et le circuit de charge peuvent avoir des constantes de temps diffétentes, lorsqu'ils ne contiennet pas les mêmes conducteurs ohmiques.

- Expression de la constante A :

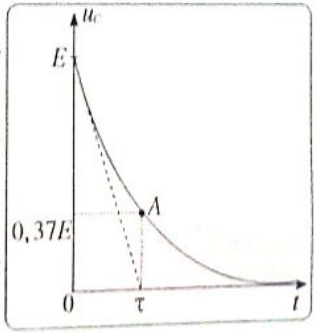
Utilisons la condition initiale de décharge:

En effet, à $t = 0$, le condensateur est totalement chargé sous la tension E. C'est-à-dire $u_c(t = 0) = E$.

En prenant la solution $u_c(t)$ à la date $t = 0$, on a:

$u_c(0) = Ae^0 = A$.

On a $A = E$ et $u_c(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$



- La détermination graphique de τ se fait de la même manière que dans le cas de la charge:

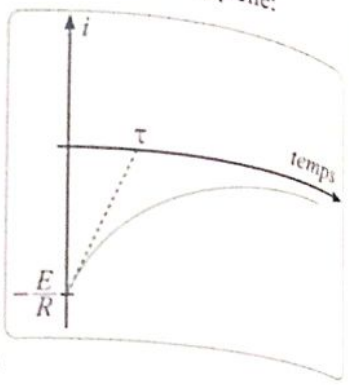
- Soit à partir de la tangente à la courbe de $u_c(t)$ à

Scanned with CamScanner

$t = 0$.

- Soit, exploitant directement cette de courbe à la date $t = \tau$, date à laquelle:

$u_c = Ee^{-\frac{\tau}{\tau}} = Ee^{-1} \simeq 0,37E$.



2.3.4- Intensité du courant de décharge.

On procède de la même manière, $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}$

Ensuite, à partir de la solution $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$, on a:

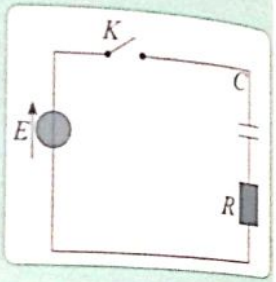
$\frac{du_c}{dt} = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$, d'où: $i = -\frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

ou encore $i(t) = -I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $I_0 = \frac{E}{R}$.

Remarquons, que cette intensité est négative, ce qui signifie que le sens de ce courant est opposé à celui obtenu au cours de la charge.

Exercice d'application 4

Le circuit de la figure ci-contre comprend:



- Un condensateur initialement non chargé, de capacité $C = 250\mu F$.
- Un générateur de tension constante $E = 20V$.
- Un conducteur ohmique de résistance $R = 8K\Omega$.
- Un interrupteur K.

1- Quelle est la valeur de la constante de temps de ce circuit?

2- Quelle est en mJ, l'énergie maximale que peut stocker le condensateur dans ce circuit?

3- La tension aux bornes du condensateur, à une date t au cours de la charge du condensateur a pour expression: $u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

3.1- Exprimer l'énergie emmagasinée par le condensateur à la date $t_1 = \tau$, en fonction de ξ_{max}. Calculer cette énergie.

3.2- on considère la date t_2 à laquelle le condensateur stocke 50% de son énergie maximale?

a- Exprimer t_2 en fonction de τ.

b- Calculer τ_2.

Solution

1- La constante de temps du circuit RC est: $\tau = R.C = 8.10^3.250.10^{-6} = 2s$

2- A la fin de la charge: $u_c = u_{c_{max}} = E$

alors, $\xi_e = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}.250.10^{-6}(20)^2 = 5.10^{-3}J = 5mJ$

3.1- A la date $t = \tau$ on a, $u_c = E(1 - e^{-1})$

alors, $\xi_e = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}.C.E^2(1 - e^{-1})^2$

$= \frac{1}{2}.250.10^{-6}.(20)^2(1 - e^{-1})^2$

$\simeq 2.10^{-3}J = 2mJ$

3.2- On a: $\xi_e = 50\%.\xi_{e_{max}}$

On peut écrire: $\frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}.\xi_{e_{max}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}CE^2$

D'où: $u_c^2 = \frac{1}{2}E^2$, ce qui donne: $u_c = \pm\frac{E}{\sqrt{2}}$

Or u_c est positive, donc: $u_c = \frac{E}{\sqrt{2}}$

En revenant à l'expression de u_c en fonction de temps:

On a: $u_c = E(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}}) = \frac{E}{\sqrt{2}}$

ou encore: $1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ce qui donne: $e^{-\frac{t_2}{\tau}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

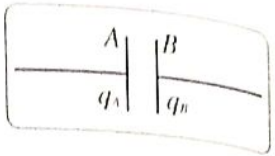
D'où: $t_2 = -\tau Ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,228\tau = 2,45s$

Scanned with CamScanner

Bilan du cours

Le condensateur:

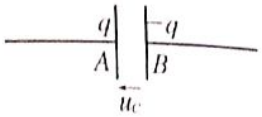
- Un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices en regard, appelées armatures. Celles-ci sont séparées par un isolant appelé diélectrique.
- Les charges électriques portées par les armatures sont de signes opposés et de même valeur absolue, commune appelée charge du condensateur noté q.



- Relation charge-tension:

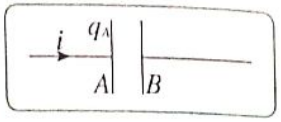
$$q = C.u_C$$

(C) (F) (V)

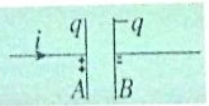


- Relation charge-intensité:

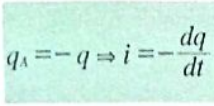
$$i = \frac{dq_A}{dt}$$



$q_A = q \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$



$q_A = -q \Rightarrow i = -\frac{dq}{dt}$



- Energie électrique emmagasinée par un condensateur:

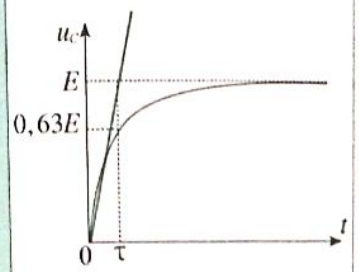
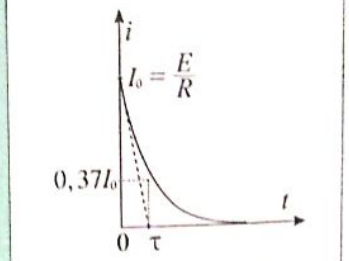
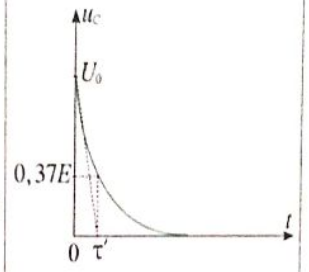
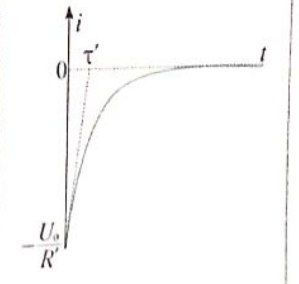
$$\xi_e = \frac{1}{2} C u_C^2$$

ξ_e en Joule (J)

U_C en volt (V)

C en Farad (F)

Le dipôle RC

	Charge du condensateur	Décharge du condensateur
Equations différentielles	$u_c + RC.\frac{du_c}{dt} = E$ $i + RC.\frac{di}{dt} = 0$	$u_c + R'C.\frac{du_c}{dt} = 0$ $i + R'C.\frac{di}{dt} = 0$
Solutions des équations différentielles	$u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$u_c = u_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}$ $i = -\frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau'}}$
Constante de temps	$\tau = R.C$	$\tau' = R'.C$
Allure des courbes	 	 

Scanned with CamScanner

Exercices

1 Compléter les phrases suivantes:

1- Le condensateur est un dipôle électrique constitué de deux plaques métalliques en regard, appelées ..... et séparées par .....

2- Lorsque la charge de l'une des armatures d'un condensateur vaut $18\mu C$, celle de l'autre vaut ....., la charge du condensateur est alors .....

3- En convention récepteur, le coefficient de proportionnalité entre la charge d'un condensateur et la tension entre ses bornes est appelé ..... du condensateur et est exprimée en ..... de symbole .....

4- Le dipôle RC est caractérisé par une durée appelée ..... de ..... Elle est notée ..... et s'exprime en .....

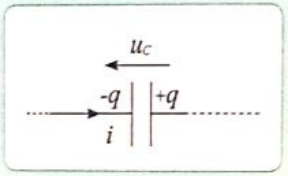
5- Un condensateur se charge plus rapidement, lorsque la résistance est beaucoup plus.....

Solution

1- armatures - isolant
2- $-18\mu C$ - $+18\mu C$
3- capacité - Farad - F
4- constante de temps τ en secondes
5- petite

2

Le schèma suivant représente la branche d'un circuit électrique comprenant un condensateur de capacité C, de charge q et traversé par un courant d'intensité i.



Répondre par vrai ou faux aux propositions suivantes:

a- $i = \frac{dq}{dt}$ b- $i = -\frac{dq}{dt}$

c- $q = C.u_C$ d- $q = -C.u_C$

e- $i = C.\frac{du_C}{dt}$ f- $i = -C.\frac{du_C}{dt}$

Solution

a- Faux ; b- Vrai
c- Faux ; d- Vrai
e- Vrai ; f- Faux

3 On considère deux condensateurs de capacité respectives: $C = 20\mu F$ et $C' = 10\mu F$, soumis respectivement aux tensions $U = 2V$ et $U' = 4V$.

Choisir les bonnes réponses:

Les charges q et q' de ces deux condensateurs et les énergies qu'ils emmagasinent sont telles que:

a- $q' = 2q$ b- $q' = \frac{1}{2}q$ c- $q' = q$

d- $\mathcal{E}'_e = \mathcal{E}_e$ e- $\mathcal{E}'_e = 4\mathcal{E}_e$ f- $\mathcal{E}'_e = \frac{1}{2}\mathcal{E}_e$

g- $\mathcal{E}'_e = 2\mathcal{E}_e$

Solution

Les réponses justes sont c- et g-.

4 On dispose de deux condensateurs de capacités respectives $C_1 = 10\mu F$ et $C_2 = 4,7\mu F$.

Quelle est la capacité C du condensateur équivalent obtenu pas l'association de ces deux condensateurs dans chacun des cas suivants:

1- En parallèle

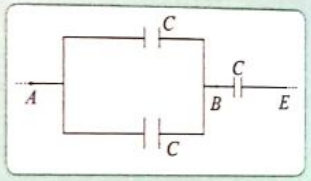
2- En série.

Solution

1- $C = C_1 + C_2 = 14,7\mu F$

2- $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
$= \frac{10.4,7}{10 + 4,7} \simeq 3,2uF$

5 Entre deux points A et E d'un circuit électrique, on associe trois condensateurs de même capacité C.



La capacité équivalente de cette association est:

a- $C_e = 3C$ b- $C_e = \frac{1}{3}C$ c- $C_e = \frac{2}{3}C$ d- $C_e = \frac{3}{2}C$

Entre A et B: $C_{AB} = C + C = 2C$.

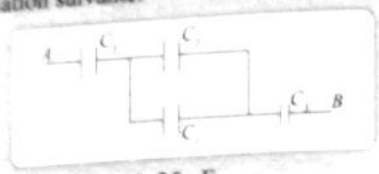
Entre A et E:

$\frac{1}{Ce} = \frac{1}{C2} + \frac{1}{C} = \frac{3}{2C}$ d'où $Ce = \frac{2C}{3}$

La réponse juste est donc c).

Scanned with CamScanner

6 On donne l'association suivante:



Avec $C_1 = 4\mu F$, $C_2 = 1\mu F$ et $C_3 = 1,25\mu F$.

Quelle est la capacité équivalente de cette association.

Solution

$C = 0,8\mu F$

7 Un condensateur de capacité $50\mu F$ emmagasine une énergie égale à $625\mu J$ lorsqu'on applique entre ses armatures une tension U.

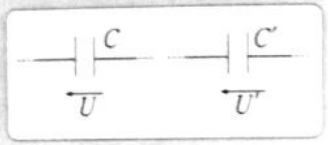
Calculer U.

Solution

L'énergie stockée par un condensateur a pour expression: $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu_c^2$

D'où: $u_c = \sqrt{\frac{e.\mathscr{E}_e}{C}} = \sqrt{\frac{2.625.10^{-6}}{50.10^{-6}}} = 5V$

8 Deux condensateurs ont respectivement comme capacités C et C'. Lorsqu'ils sont soumis aux tensions U et U'; ils emmaganisent la même énergie électrique.



Calculer U' sachant que: $U = 9V$ et $C' = 4C$.

Solution

On a: $\mathscr{E}'_e = \frac{1}{2}C'U'^2$ et $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}CU^2$

La condition $\mathscr{E}'_e = \mathscr{E}_e$ entraine que:

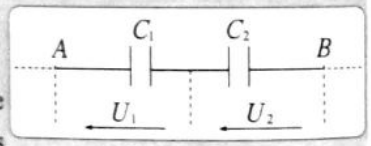
$C'U'^2 = CU^2$.

$U' = U\sqrt{\frac{C}{C'}} = U\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{U}{2} = 4,5V$

9 La branche AB d'un circuit électrique type RC, comprend deux condensateurs ayant pour capacité respectivement C_1 et C_2.

On donne: $C_1 = 220\mu F$; $U_1 = U_2 = 6V$

Quelle doit être la valeur de C_2 pour que l'énergie emmagasiné par le dipôle AB soit trois fois plus petite que celle emmagasiné par le condensateur de capacité C_1.



Solution

On a:
$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C_1U_{AB}^2 = \frac{1}{2}C_1(2U)^2 = 2C_1U^2$

Or: $\mathscr{E}'_e = \frac{1}{3}\mathscr{E}_e = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{6}C_1U^2$

L'équivalence de ces deux résultats nous permet d'écrire:

$2C_1U^2 = \frac{1}{6}C_2uU^2$

D'où $C_2 = \frac{1}{12}C_1$

Or, $C_e = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$

Donc:

$\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{12} \Rightarrow C_1 + C_2 = 12C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{11} = 20uF$

10 Choisir (la) ou (les) bonne(s) réponse (s):

1- Chargé sous une tension de $5V$, un condensateur de capacité $400\mu F$ emmagasine comme énergie:

a- $100mJ$ b- $50mJ$ c- $5mJ$

2- Au cours de la charge d'un condensateur sous une tension E; la tension entre ses bornes, à la date: $t = \tau$ est:

a- Ee^{-1} b- $E(1-e)$ c- $E(1+e^{-1})$ d- $E(1-e^{-1})$

3- L'intensité du courant qui traverse un dipôle RC au cours de la charge du condensateur est une fonction:

a- croissante au cours du temps.

b- décroissante au cours du temps.

Solution

1- c) $5mJ$

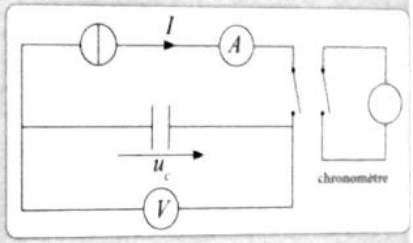
2- d)

3- b)

11 On réalise la charge d'un condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur idéal de courant qui débite un courant d'intensité constante $I = 13,4\mu A$.

Un chronomètre électronique se déclenche à la date de fermeture du circuit et, il s'arrête à l'ouverture du circuit.

Un voltmètre életronique mesure la tension u_c aux bornes du condensateur pour différentes valeur de la durée t de charge.



Les résultats sont groupés dans le tableau suivant:

$t(s)$	0,00	1	2	3	4	5

Scanned with CamScanner

$u_c\,(V)$	0,00	2,81	5,55	8,37	11,14	13,94
$q(u_c)$						
$\frac{q}{u_c}$						

1- En utilisant la relation charge-intensité, montrer que la charge q du condensateur est la forme $q = I.t$.

2- Compléter le tableau précédent.

3- Déterminer la capacité C du condensateur.

Solution

1- La relation charge-intensité dans un circuit comprenant un condensateur est:

$i = \frac{dq}{dt}$

Or l'intensité i est ici constante $i = I$.

Alors: $\frac{dq}{dt} = I$, donc: $q = I.t + cte$

Et puisque $q = 0$ à $t = 0$, on a:

$cte = 0$, d'où: $q = I.t$.

2- Valeur de q:

On utilise la relation précédente $q = I.t$ avec $I = 13,4.10^{-6}A$.

$t(s)$	0,00	1	2	3	4	5
$u_c(V)$	0,00	2,81	5,55	8,37	11,14	13,94
$q(u_c)$	0	13,4	26,8	40,2	53,6	67,0
$\frac{q}{u_c}(\mu F)$		4,77	4,82	4,80	4,81	4,80

3- D'après la relation charge-tension d'un condensateur $q = C.u_c$.

On constate que le rapport $\frac{q}{u_c}$ est presque constant et il représente la valeur de la capacité C.

On peut dire que: $C \simeq 4,8\mu F$.

12 Le schéma de la figure (1) représente le circuit de charge d'un condensateur, il comprend:

- Un condensateur initialement déchargé de capacité C.
- Un générateur idéal de courant fournissant un courant d'intensité constante $I_0 = 20\mu A$.
- Un voltmètre éléctronique.
- Et un interrupteur K.

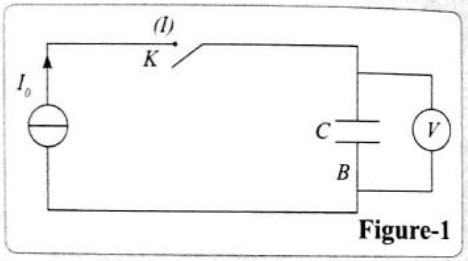


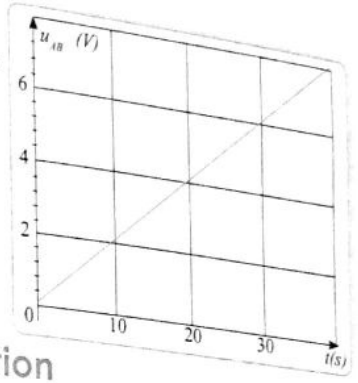
Figure-1

La figure (2) représente les variations de la tension u_{AB} aux bornes du condensateur au cours du temps.

1- Montrer que la capacité C du condensateur s'exprime par la relation $C = \frac{I_0}{a}$, a étant le coéfficient directeur de la droite de la figure (2).

2- Calculer a, en déduire la valeur de C.

3- Déterminer l'énergie stockée par le condensateur à la date $t_1 = 1mn$.



Solution

1- La fonction $u_{AB} = f(t)$ est linéaire, donc de la forme: $u_{AB} = at$ (1)

On a: $q = C.u_C = C.u_{AB}$

alors: $u_{AB} = \frac{1}{C}.q$

Et, on a encore: $i = \frac{dq}{dt}$

ici i est constante $i = I_0$, on déduit que:

$q = I_0 t + cte$

Et puisque à $t = 0$ on a:

$q = 0$, alors $cte = 0$

D'où: $q = I_0 t$.

L'expression de u_{AB} devient:

$u_{AB} = \frac{1}{C}.I_0 t = I_0 t$ (2)

En comprenant (2) à (1) on a: $a = \frac{I_0}{C}$

D'où: $C = \frac{I_0}{a}$.

2- $a = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{2-0}{10-0} = 0,2V.s^{-1}$,

$C = \frac{I_0}{a} = \frac{20.10^{-6}}{0,2} = 100\mu F$

3- $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C.u_C^2$

A la date $t_1 = 1mn = 60s$ on a:

$u_C = at_1 = 0,2.60 = 12V$

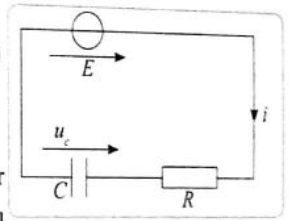
$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}.100.10^{-6}(12)^2$

$= 7,2.10^{-3}J = 7,2mJ$

13 On considère le circuit de la fig (1).

La tension u_C a pour expression $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau = RC$.

On donne $R = 2,5K\Omega$.

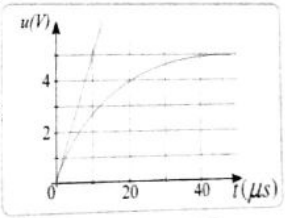


1- Comment doit-on brancher un oscilloscope pour visualiser l'évolution de la tension u_C au cours du temps.

2- Quel est la valeur de E. Justifier.

3- Montrer que la constante a la dimension de temps.

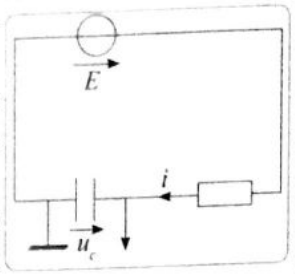
4- Quelle est sa valeur. En déduire C?



Scanned with CamScanner

Solution

1- Visualisation de u_c.



2- A partie de la courbe $E = 5V$.

Justification à partir des **données:**

$u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ à la fin de la charge $(t \to \infty)$:

$u_c(\infty) = E(1 - e^{-\infty}) = E(1 - 0) = E$

3-

$$[\tau] = [R].[C] = \frac{[u]}{[I]}.\frac{[q]}{[u]}$$

$$= \frac{[I].[\Delta t]}{[I]} = [\Delta t]$$

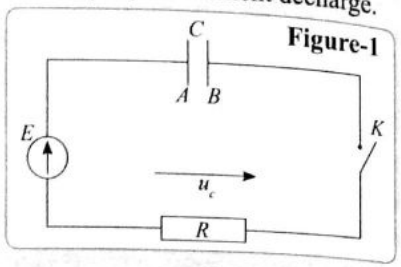
4- Graphiquement: $\tau \simeq 10ms$.

$$C = \frac{\tau}{R}$$

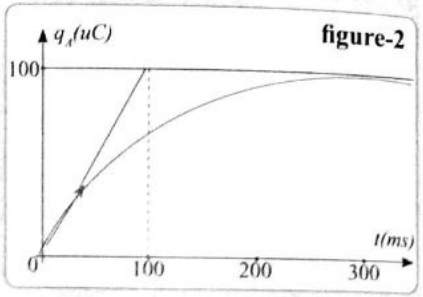
$$C = \frac{10.10^{-6}}{2,5.10^{3}} = 4.10^{-9} = 4nF$$

14 On considère un condensateur de capacité $C = 20\mu F$, initialement déchargé.

Pour le charger, on réalise le montage de la figure ci-contre figure (1).



A l'instant $t = 0$, on ferme le circuit à l'aide de l'interrupteur K. L'évolution au cours du temps de la charge électrique portée par l'armature A du condensateur est représenté sur la figure (2).



1- En vous aidant du graphe, déterminer la valeur de la f.é.m E du générateur.

2- Sachant que $u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$, exprimer la fonction $q(t)$. On posera $RC = \tau$. Calculer q à l'instant $t = \tau$.

3- Déterminer la valeur de R.

4- Déterminer i_0 l'intensité du courant au début de la charge.

Solution

1- Appliquons la relation: tension-charge: $q = C.u_c$.

A la fin de la charge cette relation s'écrit: $q_{max} = C.u_{c\,max} = CE$.

D'où: $E = \frac{q_{max}}{C}$

Graphiquement: $q_{max} = 100\mu C = 10^{-4}C$

D'où: $E = \frac{10^{-4}}{2.10^{-5}} = 5V$

2- $q(t) = C.u_c(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$= q_{max}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$q(t = \tau) = q_{max}(1 - e^{-1}) = 0,63q_{max}$

$= 0,63.100 = 63\mu C$

3- Tirons du graphe la valeur de τ:

$\tau = 100ms$.

Or, $\tau = RC$, d'où:

$R = \frac{\tau}{C} = \frac{100.10^{-3}}{20.10^{-6}} = 5.10^{3}\Omega = 5K\Omega$

4- $i_0 = \left(\frac{dq}{dt}\right)_0 =$ peu de la tangente à $t = 0$

Cette pente a pour valeur:

$\frac{(100 - 0).10^{-6}}{(100 - 0).10^{-3}} = 10^{-3}C/s$

D'où: $i_0 = 10^{-3}A = 1mA$

Autre méthode: on a:

$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C.\frac{du_c}{dt} = C.\frac{E}{RC}.e^{-\frac{t}{RC}}$

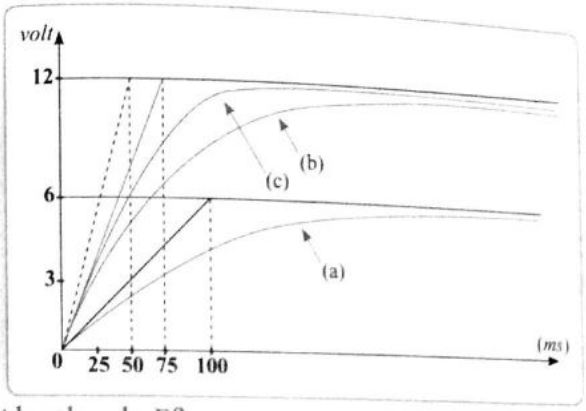
$i_0 = i(t = 0) = \frac{E}{R}e^{-\frac{0}{RC}} = \frac{E}{R}$

$= \frac{5}{5.10^{3}} = 1.10^{-3}A$

15 Sous une même tension constante E, on charge les deux condensateurs suivants:

- Le premier de capacité C monté en série avec une résistance $R = 50k\Omega$.
- Le deuxième condensateur de capacité $C' = \frac{C}{2}$ monté en série avec une résistance $R' = 3R$.

Les tensions aux bornes de ces deux condensateurs se trouvent parmi les trois courbes (a), (b) et (c) de la figure suivante:



1- Quelle est la valeur de E?

2- Attribuer à chaque condensateur, la courbe qui lui correspond.

3- Déterminer C et C'.

Solution

1- Les deux condensateurs sont chargés sous la même tension, il s'agit donc de la tension $E = 12V$.

2- Pour le condensateur C on a:

$\tau = R.C$

Comparons τ et τ':

$\tau' = R'.C' = 3R.\frac{C}{2} = \frac{3}{2}RC = \frac{3}{2}\tau > \tau$

Il en résulte qu'au condensateur C' correspond la courbe (b) à partir de laquelle on lit: $\tau' = 75ms$.

Par contre la courbe C à partir de laquelle

Scanned with CamScanner

on note $\tau = 50ms$, correspond au condensateur C

$\tau = RC \Rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{50.10^{-3}}{50.10^{3}}$

$= 1.10^{-6}F = 1\mu F$

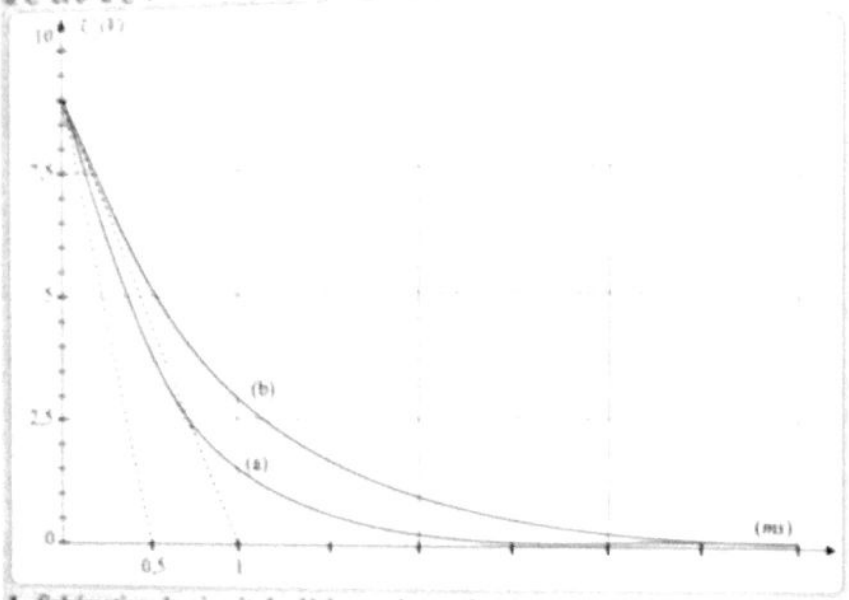
$C' = \frac{C}{2} = 0,5\mu F$

16 Deux condensateurs sont préalablement chargés, séparément sous la même tension E

On décharge chacun de ses condensateurs à travers des conducteurs ohmiques de même résistance R

La capacité de l'un de ses condensaters est notée C, celle de l'autre est C'

Un montage approprié a conduit à l'obtention de la figure suivante où a-correspond à C et b- à C'.



1- Schématiser le circuit de décharge du condensateur de capacité C, orienté en convention récepteur

2- Quelle est la valeur de la tension E ?

3- Etablir l'équation differentielle vérifiée par la tension u_c ?

4- Justifier que la fonction $u_c = f(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = RC$ est une solution de cette équation differentielle

5- Exprimer C' en fonction de C

6- A quelle date t comptée à partir du début de la décharge, la tension u_c vaut la moitié de u_c ?

Solution

1- Circuit de décharge

2- $E = 9V$

3- Appliquons la loi d'additivité des tensions

$u_c + u_r = 0$

Or, $u_r = Ri$ et

$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

Alors $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$

4- Dérivons la fonction proposée $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ par rapport au temps on obtient: $\frac{du_c}{dt} = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Remplaçons dans le premier terme de l'équation différentielle, et tenant compte de $\tau = RC$

$u_c + RC\frac{du_c}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}} + RC\left(-\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0$

5- D'après le graphe, nous constatons que $\tau' = 2\tau$

Or, $\tau = RC$ et $\tau' = RC'$

donc, il en résulte que $RC' = 2RC$

C'est-à-dire $C' = 2C$

6- Nous avons la condition $u_c = 2u_c$

Or, $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ et $u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau'}}$

D'où $Ee^{-\frac{t}{\tau}} = 2Ee^{-\frac{t}{\tau'}}$

$e^{\frac{t}{\tau'}-\frac{t}{\tau}} = 2$

$t\left(\frac{1}{\tau'}-\frac{1}{\tau}\right) = Ln2$

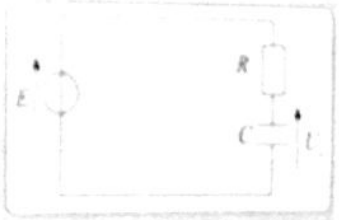
$t = Ln2\frac{\tau\tau'}{\tau'-\tau}$

$t = Ln2\frac{10^{3}.0,5.10^{-3}}{0,5.10^{3}} = 0,69ms$

17 Un dipôle RC est soumis à une tension constante établie par un générateur idéal de tension (voir figure)

La tension u_c varie avec le temps pendant la charge du condensateur selon la loi:

$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$



On donne

$\tau = RC$, constante de temps du circuit

$E = 10V$, $R = 10A\Omega$, $C = 500\mu F$

1- Calculer la charge maximale q_{max} du condensateur

Quelle est l'énergie maximale qu'il emmagasine?

2- A quelle date la tension aux bornes du condensateur prend la valeur $\frac{E}{2}$

3- Quelle est à cette date, l'energie emmagasinée par le condensateur?

4- Pour tripler la valeur de la constante de temps du circuit, on y insère un deuxième condensateur de capacite C', en l'associant au condensateur precedent

4.1- Comment les deux condensateurs doivent-ils être associés?

4.2- Quelle est alors la valeur de C'?

Scanned with CamScanner

Solution

1- A la fin de la charge $(t \to \infty)$, la tension du condensateur est maximale $u_{C_{max}} = E$.

Sa charge est alors:

$q_{max} = CU_{max} = C.E$

$= 500.10^{-6}.10 = 5.10^{-3}C$

L'énergie qu'il emmagasine suite à cette charge est: $\mathcal{E}_{e_{max}} = \frac{1}{2}Cu_{C_{max}}^2 = \frac{1}{2}CE^2$

$= \frac{1}{2}.500.10^{-6}.(10)^2$

$= 2,5.10^{-2}J$

2- A une date t; $u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Lorsque u_C devient égale à $\frac{E}{2}$, on écrit:

$\frac{E}{2} = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

C'est-à-dire: $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ou encore: $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Pour extraire t, on utilise la fonction « Ln ».

$Ln(e^{-\frac{t}{\tau}}) = Ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Ce qui donne: $-\frac{t}{\tau} = -Ln2$ d'où:

$t = \tau \ln 2$

$t = RC\ln 2 = 10^4.500.10^{-6}.\ln 2$

$\simeq 3,46s$

3- $E_e = \frac{1}{2}C.u_C^2 = \frac{1}{2}C.\left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}CE^2\right)$

$= \frac{1}{4}\mathcal{E}_e = 6,25.10^{-3}J$

4.1- En ajoutant le deuxième condensateur, la constante de temps τ_2 du nouvel circuit est: $\tau_2 = R.C_e$ avec: C_e: capacité du condensateur équivalent.

de la condition: $\tau_2 = 3\tau_1$.

Il en résulte que: $R.C_e = 3RC$

C'est-à-dire: $C_e = 3C > C$.

Exprimons C_e en fonction de C et C' dans les deux cas suivants:

- Si l'association est en série on aura:

$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}$ d'où: $C_e = \frac{CC'}{C+C'}$

On aura dans ce cas $C_e < C$.

- Si l'association est en parallèle:

$C_e = C + C' > C$

Ce résultat confirme la condition $(C_e > C)$ trouvée dans cette expérience.

4.2- On a alors: $\begin{cases} C_e = 3C \\ C_e = C + C' \end{cases}$

D'où: $C + C' = 3C \Rightarrow C'$

$= 2C = 10^{-3}F$

18 On charge un condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur de tension constante E. figure (1).

(D) est un conducteur ohmique de résistance $R = 2,67k\Omega$.

A la date $t = 0$, on ferme le circuit à l'aide de l'interrupteur K.

1- Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension u_C au cours du temps.

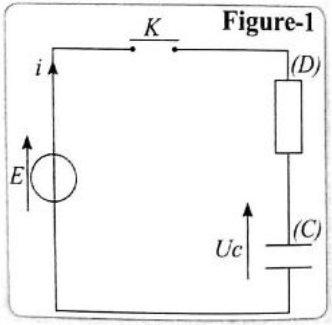


Figure-1

On pose: $RC = \tau$, constante de temps de ce circuit.

2- Sachant que cette équation a pour solution $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Montrer que: $Ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau}t + \ln E$

3- La courbe de la figure représente les variations de la grandeur $\ln(E - u_C)$ en fonction du temps t.

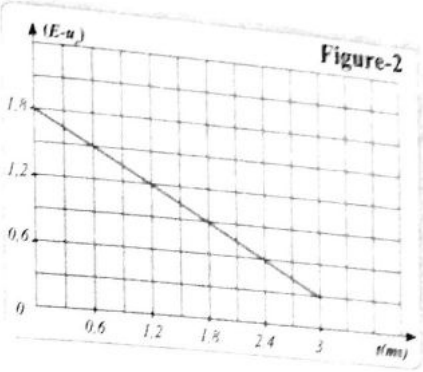


Figure-2

3.1- Déterminer les valeurs de E et τ.

3.2- Trouver la capacité C' du condensateur qu'il faut associer avec le condensateur de capacité dans ce circuit pour avoir une nouvelle constante de temps $\tau' = \frac{1}{4}\tau$, en précisant le type de cette association (en série ou en parallèle).

Solution

1- $u_C + u_R = E \Rightarrow u_C + Ri = E$

On a: $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$

donc: $u_C + RC\frac{du_C}{dt} = E$

2- On a: $u_C = E(1 - e^{\frac{t}{\tau}})$,

alors: $E - u_C = E.e^{\frac{t}{\tau}}$

En utilisant la fonction

En utilisant l'opérateur Ln; on peut écrire:

$\ln(E - u_C) = LnE - \frac{t}{\tau}$

C'est-à-dire: $Ln(E - u_C) = -\frac{1}{\tau}.t + LnE$

3.1- Valeur E et τ:

La droite de la figure donne:

$LnE = 1,5$

D'où: $E = e^{1,8} \simeq 6V$.

La pente de cette droite est:

$a = \frac{0,3 - 1,8}{(3-0).10^{-3}} = -500s^{-1}$

$\tau = -\frac{1}{a} = \frac{1}{500} = 2.10^{-3}s$

3.2- La condition:

$\tau' = C = \frac{\tau}{R} = \frac{2.10^{-3}}{2,6.10^3}$

$= 0,75.10^{-6}F \simeq 0,75\mu F$

La condition: $\tau' = \frac{\tau}{4}$ permet d'écrire:

$R.C_e = \frac{R.C}{4}$ (1)

D'où: $C_e = \frac{C}{4} < C$

Les deux condensateurs doivent être montés en série.

Dans ce cas: $C_e = C.\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}$

d'où: $C_e = \frac{CC'}{C+C'}$

En revenant à (1), on écrit:

$R.\frac{CC'}{C+C'} = R.\frac{C}{4} \Rightarrow 4C = C + C'$

$C' = \frac{C}{3} = \frac{0,75}{3} = 0,25\mu F$

Scanned with CamScanner

19 Un générateur de tension constante E est branché aux bornes d'un dipôle RC fig (1).

Le condensateur est non chargé.

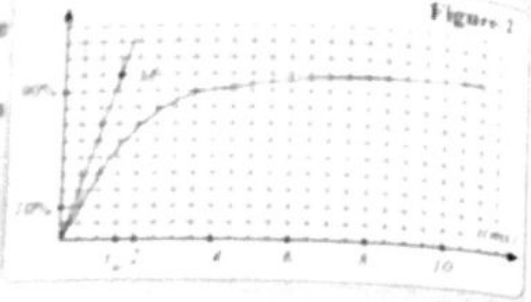
On donne $R = 500\Omega$ et $E = 12V$.

A la date $t = 0$ on ferme le circuit.

Un dispositif convenable a permis de suivre les variations de $\frac{u_c}{E}$ au cours du temps fig (2).

Figure 1

Figure 2



1- Etablir l'équation différentielle de la tension u_c.

2- Vérifier que cette équation admet comme solution $u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ on pose: $RC = \tau$.

3- Montrer que l'abscisse du point M sur la tangente à la courbe obtenue, à la date $t = 0$ admet pour abscisse τ.

4- En déduire la valeur C.

5- A une date t_1 le rapport $\frac{u_c}{E}$ prend la valeur 10% et à la date t_2 sa valeur est 90%.

Calculer la durée $\Delta t = t_2 - t_1$.

Solution

1- La loi d'additivité des tensions permet d'écrire: $u_c + u_R = E$

Par ailleurs: $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = R\frac{d(Cu_c)}{dt} = RC\frac{du_c}{dt}$

Alors: $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = E$

2- En remplaçant u_c et $\frac{du_c}{dt} = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

$= u_c + RC\frac{du_c}{dt}$

$= E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + RC\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

$= E$

3- On a $\frac{u_c}{E} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

On sait: $\left(\frac{d(\frac{u_c}{E})}{dt}\right) = a$ pente de la tangente.

Graphiquement: $a = \frac{1-0}{t_M - 0} = \frac{1}{t_M}$

$\left(\frac{d(\frac{u_c}{E})}{dt}\right)_0 = \frac{1}{RC}e^{-\frac{0}{RC}} = \frac{1}{RC}$

En égalisant ces deux termes on obtient: $t_M = RC = \tau$

4- $C = \frac{\tau}{R} = \frac{1,5.10^{-3}}{500} = 3.10^{-6}F = 3\mu F$

5.1- Posons: $x = \frac{u_c}{E} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ceci donne: $e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - x$

On peut écrire:

$\frac{t_2}{\tau} = e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-0,1}{1-0,9} = 9$

Ensuite $\ln e^{\frac{t_2}{\tau}} = \ln 9$

D'où $\Delta t = \tau \ln 9 = 3,29ms$

20 On dispose d'un condensateur de capacité $C = 200\mu F$ totalement chargé sous une tension $E = 10V$.

Pour étudier sa décharge à travers un résistor de résistance R on réalise le circuit de la figure suivante. Le circuit est fermé à partir de la date $t = 0$.

On donne $R = 0,5K\Omega$

1- En tenant compte de la convention de ce circuit, établir l'équation différentielle suivante: $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$

2- Vérifier à partir de cette équation que $\tau = RC$ a la dimension d'un temps.

3- Calculer τ.

4- Sachant que la solution de l'équation différentielle précédente s'écrit: $u_c(t) = Ae^{-\alpha t}$

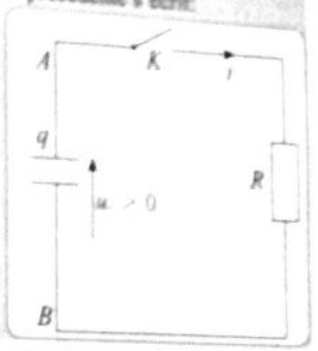
Montrer que $A = E$ et $\alpha = \frac{1}{\tau}$

5- Calculer à l'instant $t = 0$:

a- L'énergie électrique emmagasinée par le condensateur.

b- L'intensité du courant traversant le circuit.

6- A quelle date le condensateur perd 75% de son énergie initiale?



Solution

1- La tension u_c étant positive, la charge portée par l'armature A est donc positive, et celle portée par B est négative.

Alors: $i = \frac{dq_A}{dt} = -\frac{dq}{dt}$

$= -\frac{d(Cu_c)}{dt} = -C\frac{du_c}{dt}$

La loi d'additivité des tensions s'écrit:

$u_c + u_R = 0$

Le résistor est orienté en convention générateur, donc: $u_R = -Ri$

Alors: $u_c - Ri = 0$

Ou encore: $u_c - R\left(-C\frac{du_c}{dt}\right) = 0$

C'est-à-dire: $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$

2- On déduit de l'équation différentielle que: $\tau = RC = -\frac{u_c}{\frac{du_c}{dt}}$

D'où: $[\tau] = \left[\frac{U}{U}\right][T] = [T]$

3- $\tau = RC = 0,5.10^3.200.10^{-6} = 0,1s$

4- Dérivons $u_c(t)$ et remplaçons dans l'équation différentielle:

$\frac{du_c(t)}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t}$

L'équation $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$ devient:

Scanned with CamScanner

$Ae^{-\alpha t} + RC(-A\alpha e^{-\alpha t}) = 0$

$Ae^{-\alpha t}[1 - RC\alpha] = 0$

Puisque t varie, cette équation n'est vérifiée que lorsque: $1 - RC\alpha = 0$; c'est-à-dire: $\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$

Déterminons A à partir des conditions initiales du circuit, à savoir: $u_c(0) = E$

On a alors: $u_c(0) = E = Ae^{-\alpha \cdot 0} = A$

5. a- $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} Cu_c^2(t)$

A la date $t = 0$,

$\mathcal{E}_c(0) = \frac{1}{2} CE^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.10^{-4} \cdot 10^2 = 10^{-2} J$

b- $i = -C\frac{du_c}{dt} = -C(-A\alpha e^{-\alpha t})$

$= \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

6- Si le condensateur perd 75% de son énergie intiale, cela signifie qu'il emmagasine 25% de cette énergie à la date t.

On peut donc écrire:

$\mathcal{E}_c(t) = \frac{25}{100} \mathcal{E}_c(0)$

Ou encore: $\frac{1}{2} Cu_c^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} CE^2$

En remplaçant $u_c(t)$, il vient:

$(Ee^{-\frac{t}{\tau}})^2 = \frac{1}{4} E^2$

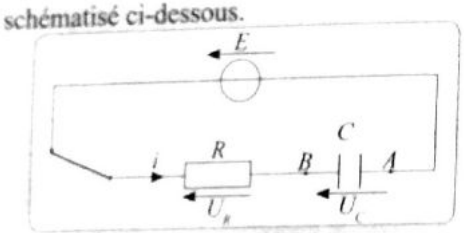
Alors: $e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{1}{4}$

D'où: $-\frac{2t}{\tau} = Ln\frac{1}{4} = -Ln4$

Donc: $t = \frac{\tau}{2} Ln4 = -\tau Ln2$

$t = 0,069s = 69ms$

21 Pour étudier la réponse du dipôle RC à un échelon montant de tension, on considère le circuit schématisé ci-dessous.



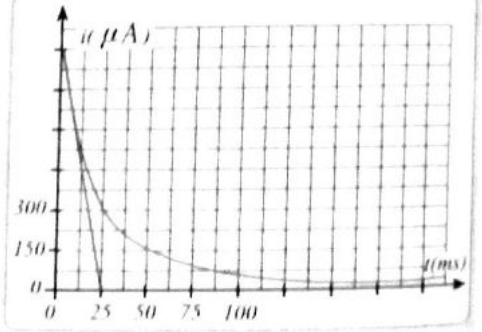
La tension u_c a pour expression $u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec: $\tau = RC$: constante de temps du circuit

On donne: $E = 36V$.

1- Montrer que l'intensité i du courant vérifie l'équation différentielle suivante:

$i + \tau \frac{di}{dt} = 0$.

2- Exprimer i à la date en fonction de E, R et t.



3- En utilisant la courbe ci-contre, déterminer les valeurs de R et C en $K\Omega$ et nF. La droite figurant sur ce document représente la tangente à la courbe $i(t)$ à la date $t = 0$.

Solution

1- Première méthode:

Loi d'additivité des tensions: $u_c + u_R = E$

Ou encore: $\frac{q}{C} + Ri = E$

q est lié à i par la relation $i = \frac{dq}{dt}$, dérivons donc cette expression par rapport au temps.

$\frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + R \cdot \frac{di}{dt} = 0$ car: $E = cte$

C'est-à-dire: $\frac{1}{C} \cdot i + R\frac{di}{dt} = 0$

Donc: $i + RC\frac{di}{dt} = 0$

2- $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

$u_c = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

D'où: $i = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

3- A la date $t = 0$, on a:

$i(0) = \frac{E}{R} e^0 = \frac{E}{R}$

D'après le graphe

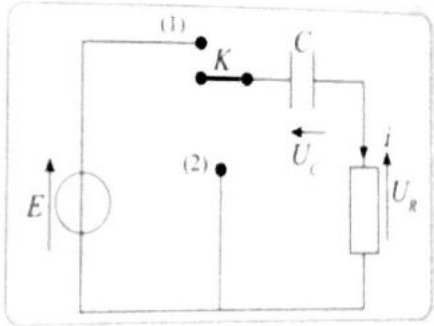
$i(0) = 900\mu A = 9.10^{-4} A$

$R = \frac{E}{i(0)} = \frac{36}{9.10^{-4}} = 4.10^4 \Omega = 40K\Omega$

$C = \frac{\tau}{R} = \frac{25.10^{-3}}{4.10^4} = 6,25.10^{-7} = 625nF$

22 Le circuit schématisé sur la figure (1) est composé des éléments suivants:

- Un générateur délivrant une tension constante $E = 20V$.
- Un condensateur de capacité C initialement déchargé.
- Un résistor de résistance $R = 33K\Omega$.
- Un commutateur à trois positions (0), (1) et (2).



1- On bascule le commutateur à la position (1) et on laisse le circuit fermé longtemps pour charger complètement le condensateur.

1.1- Quelle valeur prend la tension u_c à la fin de la charge?

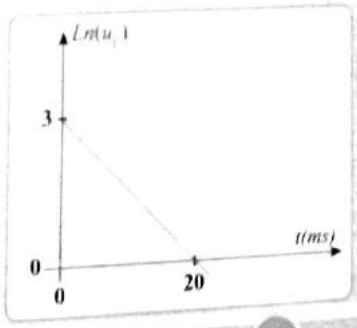
1.2- Quelle est la valeur de l'intensité de courant traversant le condensateur à la fin de la charge?

1.3- Justifier ce résultat.

2- On bascule le commutateur à la position (2), à une prise comme origine des temps ($t = 0$).

2.1- Montrer que la tension u_c vérifier l'équation différentielle suivante:

$u_c + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{du_c}{dt} = 0$; En exprimant α en fonction



Scanned with CamScanner

de R et C.

2- L'équation différentielle précédente admet comme solution $u_c = E.e^{-\alpha t}$.

Un logiciel a permis de tracer les variations de Lnu_c en fonction du temps (figure-2) ou est u_c en volts.

2.2.1- Montrer que les variations de Lnu_c en fonction du temps est une fonction affine.

2.2.2- Justifier la valeur de E citée dans l'énoncé.

2.2.3- Déterminer la valeur de C.

Solution

1- 1.1- A la fin de la charge:

$u_c = E = 20V$

1.2- $i = 0$.

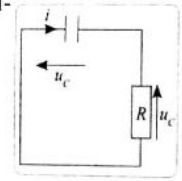
1.3- $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_c)}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}$

Lorsque le condensateur est complètement chargé (régime permanent) on a:

$u_c = cte = E$.

Alors: $\frac{du_c}{dt} = 0$ donc: $i = 0$.

2.1- En appliquant la loi d'additivité des tensions au circuit ci-contre, on a:



$u_c + u_R = 0$

C'est-à-dire:

$u_c + Ri = 0$

Ou encore: $u_c + RC.\frac{du_c}{dt} = 0$

Donc: $u_c + \frac{1}{\alpha}.\frac{du_c}{dt} = 0$

Avec: $\frac{1}{\alpha} = RC$; alors: $\alpha = \frac{1}{RC}$.

2.2.1- D'après la solution $u_c = Ee^{-\alpha t}$.

On peut déduire que:

$Lnu_c = Ln(E.e^{-\alpha t}) = LnE - \alpha t$

$= -\alpha t + LnE = at + b$

2.2.2- Valeur de E:

$LnE = b \Rightarrow E = e^b = e^3 = 20V$

2.2.3- Valeur de C:

Exploitons la pente a de cette droite:

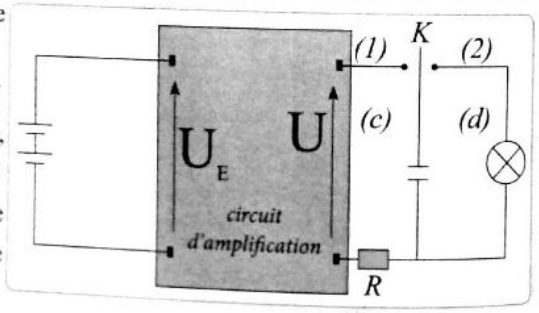
$a = -\alpha = -\frac{1}{RC}$; d'où: $C = -\frac{1}{R.a}$

$a = \frac{\Delta(Lnu_c)}{dt} = \frac{0-3}{20.10^{-3}-0} = -150s^{-1}$

$C = \frac{1}{33.10^3.150} \simeq 2.10^{-7}F$

23 Le principe du flash électronique d'un appareil photo est basé sur la charge décharge de condensateur de capacité: $C = 200\mu F$.

La tension de charge $U = 300V$ est obtenue à partir de deux piles, chacune de f.é.m $E = 1,5V$ grâce à un circuit électronique (figure-1) permettant cette amplification.



Lorsque l'interrupteur est dans la position (1), le condensateur se charge sous la tension U pendant une durée de 5 secondes. Au moment de la prise de photo. Une poussoire permet d'ouvrir le circuit de charge (C) et de fermer le circuit de décharge (d) cette étape dure cinq milliseconde.

1- Calculer l'énergie $\mathscr{E}_e$ emmagasinée par le condensateur avant la prise d'une photo.

2- Peut-on avoir une telle énergie en branchant le condensateur directement avec les deux piles?

3- Calculer la puissance électrique moyenne émise par le flash sous forme de lumière.

On considère que l'énergie du condensateur est totalement convertie en lumière émise par la lampe du flash (L) considérée comme un résistor.

4- Combien de lampes identiques de 100 walts chacune, faut-il pour avoir une puissance équivalente à celle émise par ce flash?

Solution

1- $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}.2.10^{-4}(300)^2 = 9J$

2- Si le condensateur est branché directement aux piles, il se charge sous la tension $U' = 2E = 3V$.

Dans ce cas; il emmagasine l'énergie $\mathscr{E}' = \frac{1}{2}CU^2 = 9.10^{-4}J$.

Avec la composante qui transforme $3V$ à $300V$. L'énergie obtenue est 10^4 fois plus grande.

3- La puissance moyenne a pour expression: $\mathscr{P}_m = \frac{Energie}{Durée} = \frac{\mathscr{E}}{\Delta t}$

Δt : la durée de décharge.

$\mathscr{E}$: L'énergie perdue par le condensateur pendant sa décharge est transformée en énergie lumineuse.

$\mathscr{P}_m = \frac{9}{5.10^{-3}} = 1,8.10^3W = 1,8KW$

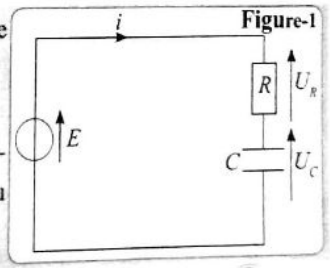
4- Soit n le nombre de lampes:

$n = \frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_{lampe}} = \frac{1,8.10^3}{100} = 18$

24 Les paramètres du circuit schématisé ci-contre sont: $E = 30V$; $R = 25K\Omega$.

Le condensateur est initialement déchargé.

On ferme le circuit à la date: $t = 0$ et on enregistre l'évolution des tensions u_c et u_R au cours du temps.



Scanned with CamScanner

1- Attribuer chacune des tensions u_C et u_R à la courbe qui lui convient.

2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C.

3- En déduire que la tension u_R vérifie l'équation différentielle suivante:

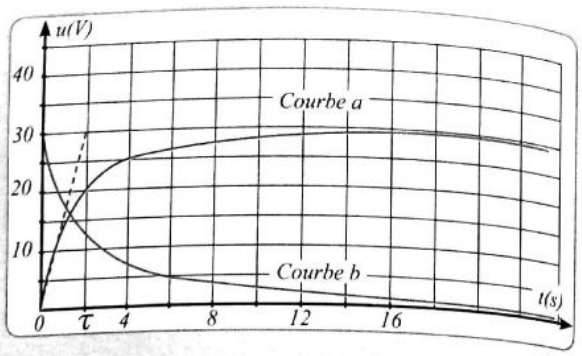
$u_R + \tau.\frac{du_R}{dt} = 0$ avec:

$\tau = RC$.

4- Vérifier que $u_R = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

5- Déterminer la valeur de C.

6- Calculer l'énergie $\mathscr{E}_e$ emmagasinée par le condensateur à la date où les courbes a et b se croisent.



Solution

1- On a: $u_C + u_R = E$.

Le condensateur est initialement non chargé: $u_C(t=0) = 0$

Donc: $u_R(0) = E$

Par suite: La courbe a représente u_C et b représente u_R.

2- $u_C + u_R = E$;

$$u_R = Ri = R.\frac{dq}{dt} = RC.\frac{du_C}{dt}$$

Alors: $u_C + RC.\frac{du_C}{dt} = E$ (1)

3- $u_R + u_C = E$, donc: $u = E - u_R$

en dérivant:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{dE}{dt} - \frac{du_R}{dt} = 0 - \frac{du_R}{dt}$$

L'équation (1) donne:

$$(E - u_R) + RC\left(-\frac{du_R}{dt}\right) = E$$

Ou encore:

$$E - u_R - RC.\frac{du_R}{dt} = E$$

D'où: $u_R + RC\frac{du_R}{dt} = 0$

4-

$$u_R + RC.\frac{du_R}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\tau}} + RC\left[-\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

$$= Ee^{-\frac{t}{\tau}}\left[\underbrace{1 - \frac{RC}{\tau}}_{=0}\right] = 0$$

5- $\tau = RC$; d'où:

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{2}{25.10^3} = 8.10^{-5}F$$

6- Lorsque les deux courbes se coupent on a: $u_R = u_R$

Or, $u_C + u_R = E$ ce qui donne $2u_C = E$

Alors: $u_C = \frac{1}{2}E = 15V$

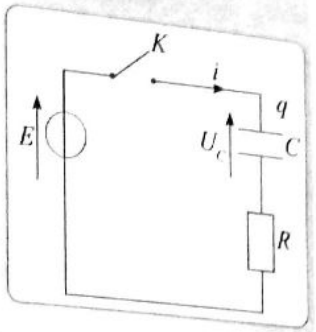
$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C.u_C^2 = \frac{1}{2}.8.10^{-5}.(15)^2$

$= 9.10^{-3}J$

25 On considère condensateur déchargé de capacité C.

Pour charger ce condensateur sous la tension E constante, on réalise le circuit de la figure suivante.

On ferme ce circuit à la date $t = 0$.



1- Montrer que la charge instantanée q du condensateur vérifie l'équation différentielle suivante:

$q + RC\frac{dq}{dt} = CE$

2- En déduire que l'intensité du courant i_0 dans le circuit s'écrit à la date, sous la forme $i_0 = \frac{E}{R}$.

3- Montrer que l'intensité de courant $i = i(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante: $i + RC\frac{di}{dt} = 0$.

Solution

1- Loi d'additivité des tensions:

$u_C + u_R = E$

Or, $u_C = \frac{q}{C}$ et $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$

Alors: $\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E$

D'où: $q + RC\frac{dq}{dt} = CE$ (1)

2- Faisons apparaître l'intensité de courant en posant: $\frac{dq}{dtd} = i$

Alors: $q + RC.i = CE$ (2).

A la date $t =$; on écrit:

$q(0) + RCi(0) = CE$

Le condensateur est déchargé à $t = 0$:

d'où: $q(0) = 0$

Donc: $i(0) = \frac{CE}{RC} = \frac{E}{R}$

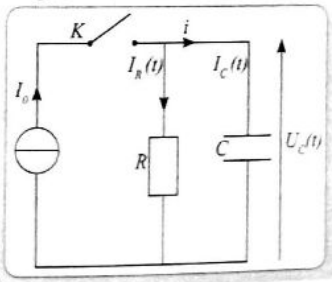
3- En dérivant l'expression (2) par rapport au temps, on écrit:

$$\frac{dq}{dt} + RC.\frac{di}{dt} = \frac{d(CE)}{dt} = 0$$

Alors: $i + RC\frac{di}{dt} = 0$.

26 Le circuit suivant comprend un condensateur de capacité C monté en parallèle avec un conducteur ohmique de résistance R. Ils sont alimentés par un générateur idéal de courant fournissant un courant d'intensité constante I_0.

Le condensateur est non chargé, à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



Scanned with CamScanner

1- Exprimer i à une date t, en fonction I_0, R et u_R à la même date.

2- Montrer que la tension u_C vérifie l'équation différentielle $RC\frac{du_C}{dt} + u_C = RI_0$

3- Sachant $u_C = f(t)$ a pour expression $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B$

Exprimer les constantes A et B en fonction de R et I_0.

4- Trouver à $t = 0$ et à t_1 en régime permanent les valeurs de i_R et i_C.

Solution

1- D'après la loi des nœuds $i_R = I_0 - i_C$

2- A partir de la relation précédente, on peut écrire $Ri_R = RI_0 - Ri_C$

On remarque $Ri_R = u_R$ (loi d'ohm)

et on a $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$

Ce qui donne $u_R = RI_0 - RC\frac{du_C}{dt}$

Ou encore: $RC\frac{du_C}{dt} + u_C = RI_0$

Les deux dipôles R et C étant en parallèle, alors: $u_R = u_C$.

D'où $RC\frac{du_C}{dt} + u_C = RI_0$

3- Expression de A et B:

On a $\frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$.

On remplace u_C et $\frac{du_C}{dt}$ dans l'équation différentielle obtenue:

$RC\left(-\frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) + Ae^{-\frac{t}{RC}} + B = RI_0$

$-Ae^{-\frac{t}{RC}} + Ae^{-\frac{t}{RC}} + B = RI_0$

Ceci donne: $B = RI_0$

La condition initiale $u_C = 0$, permet de trouver A:

$u_C(0) = 0 = Ae^0 + B \Rightarrow A = -B = -RI_0$

4- On a: $u_R = u_C = RI_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$i_R = \frac{1}{R}u_R = I_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$i_R(0) = 0$ et $i_R(\infty) = I_0$

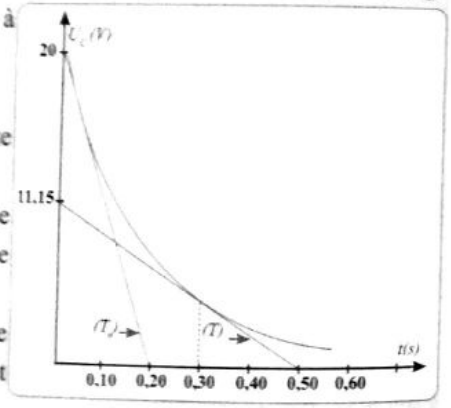
$i_C = I_0 - i_R$ ou bien: $i_C = C\frac{du_C}{dt}$

Ceci donne: $i_C = I_0e^{-\frac{t}{RC}}$

$i_C(0) = I_0$ et $i_C(\infty) = 0$

27 **On réalise la décharge d'un condensateur de capacité $C = 100\mu F$ chargé auparavant sous une tension constante E, à travers une résistance R.**

On donne $u_C = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = RC$.



1- Déterminer graphiquement la constante de temps τ de ce circuit. En déduire R.

2- La droite (T) sur le schéma représente la tangente à la courbe de $u_C(t)$ à la date $t_1 = 0,30s$.

Montrer en vous aidant de cette tangente que l'intensité de courant dans le circuit est $22,3ms$.

3- Retrouver ce résultat en utilisant une méthode de calcul.

Solution

1- $\tau = 0,20s$;

$R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,2}{100.10^{-6}} = 2.10^3\Omega = 2K\Omega$

2- On a: $i = C\left(\frac{du_C}{dt}\right)$. Graphiquement la dérivée $\frac{du_C}{dt}$ représente la pente K de la tangente à la courbe $u_C = f(t)$ de à la date t_1.

$K = \frac{0 - 11,15}{0,5 - 0} = -22,3V/s$

Donc: $i = C.K = 100.10^{-6}.(-22,3)$

$= -2,23.10^{-3}A$

$= -2,23mA$

3- Par calcul:

$u_C = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Donc: $i = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i(t_1) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t_1}{\tau}} = -\frac{20}{2.10^3}e^{-\frac{0,5}{0,2}}$

$= -0,223.10^{-2}A$

$= -2,23mA$

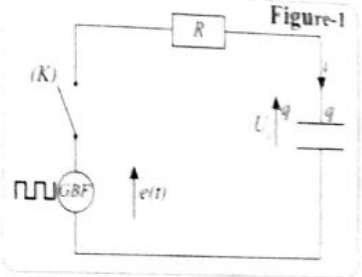
28 **On étudie le comportement d'un dipôle RC, soumis à une tension $e(t)$ période rectangulaire fournie par un générateur à basse fréquence $(G.B.F)$, figure (1).**

- Le condensateur est initialement non chargé.

On donne: $R = 164\Omega$

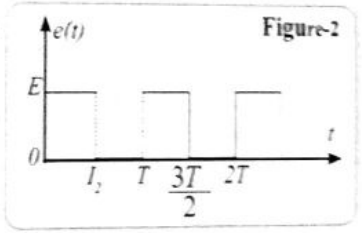
- La figure (2) représente les variations de la tension $e(t)$ au cours du temps.

- Le circuit est fermé à la date $t = 0$.



1- Charge du condensateur.

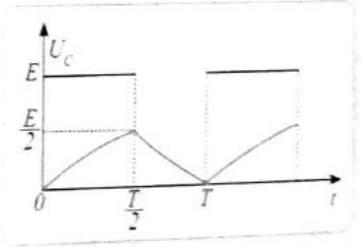
1.1- Dans quels intervalles de temps le condensateur se charge-t-il? Et dans quels intervalles, il se décharge?



1.2- Etablir l'équation différentielle de u_C dans l'intervalle $0 \le t \le \frac{T}{2}$.

1.3- Sachant que la solution de cette équation est de la forme $u_C(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Exprimer A et τ en fonction des paramètres du circuit.



1.4- Lorsqu'on fixe la fréquence N sur la valeur $20KHz$, on obtient la courbe de la figure (3).

Exprimer C en fonction de R et N. Calculer C.

1.5- On considère que le condensateur est totalement chargé lorsque la valeur de la tension u_C s'approche de sa valeur maximale E avec un écart de 1%.

Scanned with CamScanner

Quelle doit être la valeur minimale T_m de la période T pour que le condensateur se charge totalement?

2- Décharge du condensateur.

On règle la période sur une valeur permettant au condensateur de se charger totalement, on prend $u_{c_m} = E$.

La tension $u_c(t)$ s'écrit dans l'intervalle $\left[\frac{T}{2};T\right[$ sous la forme $u_c(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}$.

L'origine des dates n'est pas changée.

2.1- Exprimer la constante B en fonction E, T et τ.

2.2- Exprimer l'intensité $i(t)$ dans les intervalles $\left[0;\frac{T}{2}\right]$ et $\left[\frac{T}{2};T\right[$.

Solution

1- Etude de la charge.

1.1- Le condensateur se charge dans les intervalles de temps $\left[0;\frac{T}{2}\right]$, $\left[T;\frac{3T}{2}\right]$, $\left[2T;\frac{5T}{2}\right]$... et, il se décharge dans les intervalles $\left[\frac{T}{2};T\right[$, $\left[\frac{3T}{2};2T\right]$.

1.2- Dans l'intervalle $\left[0;\frac{T}{2}\right]$, la tension est: $e(t) = E = cte$.

En tenant compte:

$u_R = Ri$ et $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt}$

On trouve: $u_c + RC\frac{du_c}{dt} = E$

1.3- En remplaçant u_c et $\frac{du_c}{dt}$ dans l'équation différentielle, on trouve: $\tau = RC$ et $A = E$.

1.4- A la date: $t = \frac{T}{2}$, on a: $u_c = \frac{E}{2}$ (fig-3).

C'est-à-dire: $E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{E}{2}$

Ce qui donne: $e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$, alors: $\frac{t}{\tau} = Ln2$

Donc: $\frac{T}{2RC} = Ln2$, d'où:

$$C = \frac{T}{2RLn2} = \frac{1}{2RNLn2}$$

$$C = \frac{1}{2.164\,2.10^4.Ln2} = 220nF$$

1.5- Valeur minimale de T:

A la fin de la charge à $t = \frac{T}{2}$, la valeur de u_c vaut 99%, son maximum E.

C'est-à-dire: $u_c(T) = \frac{99}{100}E = 0,99E$

Ou encore: $E(1-e^{-\frac{T}{2RC}}) \geq 0,99E$

Ce qui donne: $e^{-\frac{T}{2RC}} \geq 0,01$

$$-\frac{T}{RC} \geq Ln(0,01)$$

$$T \geq RCLn(0,01) = T_{min}$$

$T_{min} = RCLn(0,01) = 4,6\tau$

2- Décharge du condensateur:

2.1- Expression de B:

Si à la date $t = \frac{T}{2}$; on a: $u_c = E$

On écrit: $Be^{-\frac{T}{2\tau}} = E \Rightarrow B = Ee^{\frac{T}{2\tau}}$

$u_c = Ee^{\frac{T}{2\tau}}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

2.2- L'expression de $u_c(t)$ est:

(1) $u_c = E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ pour: $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$

(2) $u_c = Ee^{\frac{T}{2\tau}-\frac{t}{\tau}}$ pour: $\frac{T}{2} \leq t < T$

On obtient en dérivant:

$$(1)\begin{cases} i = +\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} i = -\frac{E}{R}e^{\frac{T}{2\tau}}.e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

29 On réalise le montage de la figure(1), comprenant:

- Un générateur idéal d'intensité
- Un microampère metre.
- Un condensateur ohmique résistance R_0.
- Un conducteur initialement déchargé, de capacité C.
- Un interrupteur de courant K.

Figure-1

On ferme K à une date $(t = 0)$, la valeur indiquée par le microampère métre est $I_0 = 4\mu A$.

Un système d'acquisition de données a permis de tracer les variations de la tension $u_{AB}(t)$ figure (2).

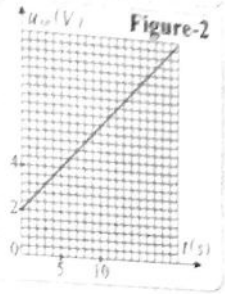


Figure-2

1- Déterminer la valeur de la résistance R_0.

2- Déterminer la valeur de la capacité C.

Solution

1- Valeur de R_0:

En considérant la branche AB du circuit, on peut écrire:

$$u_{AB} = u_{R_0} + u_c = I_0 + u_c$$

A la date $t = 0$, on a: $u_c = 0$, alors:

$$R_0 = \frac{u_{AB}(0)}{I_0} = \frac{2}{4.10^{-6}} = 500K\Omega$$

2- Valeur de C:

Exprimons la tension u_c en fonction du temps.

On sait que: $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}$, et puisque $i = I_0 = cte$, et $u_c(0) = 0$; on peut écrire:

$u_c = \frac{I_0}{C}.t$ (1)

Et, puisque $u_{AB}(t) = A.t + B = At + u_{AB}(0)$

$$= At + R_0I_0$$

et, $u = u_{AB}(t) - u_{R_0} = u_{AB}(t) - R_0I_0$

$$= At + R_0I_0 - R_0I_0 = At$$

En identifiant ce résultat avec l'expression (1), on déduit que: $\frac{I_0}{C} = A$: pente de la droite $u_R(t)$.

d'où: $C = \frac{I_0}{A} = \frac{4.10^{-6}}{\frac{4-2}{5}} = 10^{-6}F$

30 On étudie dans cet exercice la charge d'un condensateur initialement non chargé, à l'aide d'un générateur idéal de courant débitant un courant d'intensité I_0. Ensuite, condensateur est déchargé à travers deux conducteurs ohmiques r et R. figure (1)

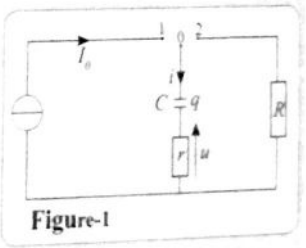


Figure-1

Donnée:

Scanned with CamScanner

• $C = 500\mu F$

• Tension de détérioration du condensateur $40V$.

• $r = 2,4k\Omega$.

A la date $t = 0$, on bascule K à la position (1), la charge du condensateur s'effectue jusqu'à la date t_1. A cette date on bascule (K) à la position (2) pour effectuer la décharge.

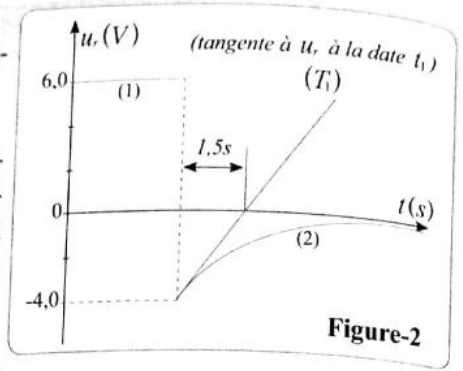


Figure-2

1- Etude de la charge du condensateur.

1.1- Justifier en vous aidant de la figure (2) que: $I_0 = 2,5mA$.

1.2- Montrer que $u_c = at$, en donnant a en fonction I_0 et C. Calculer a

1.3- A la date t_1 on a: $u_c = U_1 = 5V$. Calculer t_1.

1.4- Quelle durée maximale t_{1max} faut-il pas dépasser?

2- Etude de la décharge.

2.1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par q pendant la décharge du condensateur.

2.2- Etablir que: $u_r + (R+r)C\frac{du_r}{dt} = 0$

2.3- Sachant que: $u_c = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ pour $t \geq t_1$ et $\tau = (R+r)C$:

a- Etablir que: $A = U_1 e^{\frac{t_1}{\tau}}$

b- Montrer que: $u_r(t) = -\frac{r}{R+r}.U_1.e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_1)}$.

Solution

1- Etude de la charge:

1.1- D'après la loi d'ohm:

$I_0 = \frac{u_R}{R} = \frac{6}{2,4.10^3} = 2,5.10^{-3}A = 2,5mA$

1.2- On a: $\frac{dq}{dt} = cte$, d'où: $q = I_0 t + b$, comme $q(0) = 0$, on déduit que:

$q(t) = I_0 t$

alors: $u_c = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{C}.t = a.t$ avec: $a = \frac{I_0}{C}$

$a = \frac{I_0}{C} = \frac{2,5.10^{-3}}{5.10^{-4}} = 5A.F^{-1}$

1.4- $t_1 = \frac{u_c(t_1)}{a} = \frac{5}{5} = 1s$

2.1- $u_c + u_R + u_R = 0$; $u_c + (r+R)i = 0$

$u_c + (r+R)C\frac{du_c}{dt} = 0$

2.2- D'après le résultat de la question précédente: $u_c + (R+r)i = 0$, alors:

$\frac{q}{C} + (R+r)i = 0$

En dérivant cette expression, on écrit:

$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + (R+r)\frac{di}{dt} = 0$

$i + (R+r)C.\frac{di}{dt} = 0$

Puisque, $i = \frac{1}{r}u_r$, alors:

$\frac{1}{r}u_r + (R+r)C.\frac{1}{r}\frac{du_r}{dt} = 0$

3.2-

a- La condition initiale de u_c pendant la décharge du condensateur est: $u_c(t) = U_1$ (1)

Et, d'après l'expression de $u_c(t)$ on écrit à: $t = t_1$.

$u_c(t_1) = Ae^{-\frac{t_1}{\tau}}$ (2)

En identifiant (1) et (2) on a: $Ae^{\frac{t_1}{\tau}} = U_1$

d'où: $A = U_1.e^{\frac{t_1}{\tau}}$.

b- $i = C.\frac{du_c}{dt} = C.\frac{d}{dt}(Ae^{-\frac{t}{\tau}}) = -\frac{CA}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i = -\frac{C}{\tau}U_1 e^{\frac{t_1}{\tau}}.e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U_1}{R+r}e^{-(\frac{t-t_1}{\tau})}$

d'où: $u_r = ri = -\frac{rU_1}{R+r}e^{-(\frac{t-t_1}{\tau})}$.

31 On considère le circuit électrique de la figure (1), composé des éléments suivants:

- Un générateur de tension constante E, et de résistance négligeable.
- Deux conducteurs ohmiques de résistance respectives r et $R = 20\Omega$.
- Un condensateur de capacité C réglable, non chargé initialement.
- Un interrupteur K à deux positions.

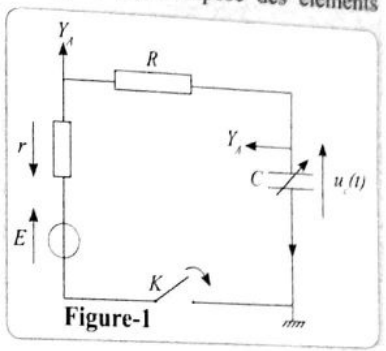


Figure-1

On règle la capacité du condensateur sur une valeur notée C_0 et on bascule K à la position (1); à une date $t = 0$. Un enregistrement a permis d'obtenir sur les voies Y_A et Y_B, les deux courbes (C_1) et (C_2) de la figure (2).

La droite (T) représente la tangente à la courbe (C_1) à la date $t = 0$.

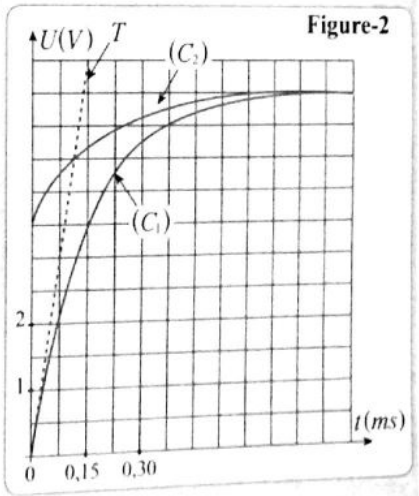


Figure-2

1- Parmi les deux courbes (C_1) et (C_2) laquelle représente la tension $u_c(t)$? Justifier.

2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$.

3- Montrer que l'intensité du courant à la fermeture du circuit (1) est: $i_0 = \frac{E}{R+r}$

4- En exploitant les courbes de la figure (2):

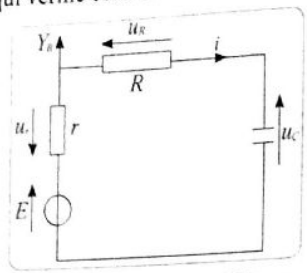
4.1- Déterminer la valeur de r.

4.2- Vérifier que $C_0 = 5\mu F$.

Scanned with CamScanner

Solution

1- Puisque le condensateur est initialement déchargé, on a: $u_C(0) = 0$, c'est la courbe (1) qui vérifie cette condition.



2- Equation différentielle vérifiée par u_C:

La loi d'additivité des tension appliquée à ce circuit s'écrit:

$u_C + u_R + u_r = E$, avec $u_R = Ri$ et $u_r = ri$, il vient: $u_C + (R+r)i = E$

Comme: $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$;

$u_C + (R+r)C.\frac{du_C}{dt} = E$

3- Expression de i_0:

Puisque: $u_C(0) = 0$, l'équation précédente donne: $0 + (R+r)i = E$

d'où: $i_0 = C\left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 = \frac{E}{R+r}$

4.1- Valeur de r:

La courbe (C_2) représente la tension u_2:

$u_2 = E - u_r = E - ri$

à $t = 0$: $u_2(0) = E - ri(0) = E - ri_0$

$i_0 = \frac{E - u_2(0)}{r}$ (2)

En identifiant i_0 avec son expression trouvée à la question précédente, on écrit:

$$\frac{E - u_2(0)}{r} = \frac{E}{R+r}$$

D'où: $RE + rE - (R+r)u_2(0) = rE$

$(R+r)u_2(0) = RE$

$r = \frac{RE}{u_2(0)} - R$

$r = R\left(\frac{E}{u_2(0)} - 1\right)$

$r = 20\left(\frac{6}{4} - 1\right) = 10\Omega$

4.2- Vérification de la valeur de C_0:

La constante de temps de ce circuit est: $\tau = (R+r)C_0$, ce qui permet de tirer C_0:

$C_0 = \frac{\tau}{R+r} = \frac{0,15.10^{-3}}{30} = 5.10^{-6}F$.

32 Le circuit de la figure comprend:

- Un générateur idéal de la tension E.
- Deux condensateurs de capacités C_1 et $C_2 = 2\mu F$.
- Un condensateur ohmique de résistance $R = 3k\Omega$
- Un interrupteur à deux positions (0) et (1).

A l'instant $t = 0$, on met K à la position (1).

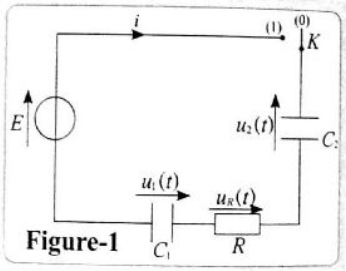


Figure-1

1- Montrer que la capacité C_e du condensateur équivalent de ces deux condensateurs est: $C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

2- Etablir que l'équation différentielle par $u_2(t)$ s'écrit: $\frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{R.C_e}.u_2(t) = \frac{E}{R.C_2}$

3- La solution de cette équation différentielle est:

$u_2(t) = A.(1 - e^{-\alpha t})$

Exprimer A et α en fonction des paramètres du circuit.

4- La figure (2) représente des deux tensions $u_2(t)$ et $u_R(t)$.

(T) est la tangente à la courbe de $u_2(t)$ à $t = 0$.

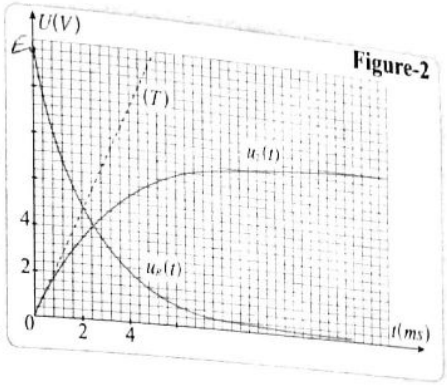


Figure-2

4.1- Déterminer:

a- La valeur de E.

b- La valeur de $u_2(t)$ et $u_1(t)$ lorsque le régime permanent est établi.

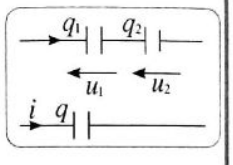
4.2- Montrer que: $C_1 = 4\mu F$

Solution

1- La tension équivalente de C_1 et C_2 s'écrit: $u = u_1 + u_2$

ou encore:

$\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$



Puisque:

$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt}$, on déduit que: $q_1 = q_2 = q$

donc: $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

ou bien: $C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

2- La loi d'additivité pour ce circuit s'écrit:

$u_1 + u_2 + u_R = E$

On a: $u_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_1} = \frac{q}{C_1}$

et: $u_R = Ri = R.\frac{dq}{dt} = RC_2\frac{du_2}{dt}$

donc: $\frac{q}{C_1} + u_2 + RC_2\frac{du_2}{dt} = E$

$\frac{C_2}{C_1}u_2 + u_2 + EC_2.\frac{du_2}{dt} = E$

$\left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right)u_2 + RC_2\frac{du_2}{dt} = E$

$\frac{(C_2 + C_1)}{C_1}u_2 + RC_2\frac{du_2}{dt} = E$

$\frac{du_2}{dt} + \frac{C_2 + C_1}{RC_1C_2}u_2 = \frac{E}{RC_2}$

$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{RC_e}u_2 = \frac{E}{EC_2}$

3- En exploitant la solution, l'équation différentielle donne:

$\alpha Ae^{-\alpha t} + \frac{1}{RC_e}A(1 - e^{-\alpha t}) = \frac{E}{RC_2}$

$Ae^{-\alpha t}\left[\alpha - \frac{1}{RC_e}\right] = \frac{E}{RC_2} - \frac{A}{RC_e}$

Cette égalité n'est valable que lorsque:

$\alpha = \frac{1}{RC_e} = \frac{1}{\tau}$ et $\frac{E}{RC_2} - \frac{A}{RC_e} = 0$

d'où: $A = \frac{RC_e}{RC_2}E = \frac{C_1}{C_1 + C_2}E$

4.1-

a- Appliquons la loi d'additivité des tensions à l'instant $t = 0$.

$u_R(0) + u_1(0) + u_2(0) = E$

Scanned with CamScanner

Comme $u_c(0) = u_{C_2}(0) = 0$, on déduit que :

$E = u_R(0) = 12V$

b- En régime permanent : $u_{C_2}(\infty) = 8V$

$u_R(\infty) + u_{C_1}(\infty) + u_{C_2}(\infty) = E$, d'où :

$u_{C_1}(\infty) = E - u_{C_2}(\infty) = 4V$

4.2- D'après la solution $u_c(t) = A(1 - e^{\cdots})$ on a :

$u_{C_2}(\infty) = A = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} E$

$\dfrac{C_1}{C_1 + C_2} = \dfrac{u_{C_2}(\infty)}{E} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

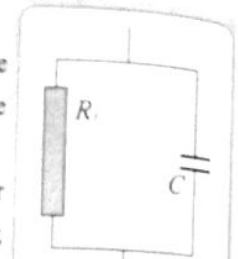
$3C_1 = 2(C_1 + C_2)$

$C_1 = 2C_2 = 4\mu F$

33 **Résistance de fuite d'un condensateur réel.**

Un condensateur réel, chargé, puis laissé en circuit ouvert, se décharge longtemps, en quelques minutes, ou plus s'il est de bonne qualité.

Pour se rendre compte, on le modélise par un condensateur idéal de capacité C en parallèle sur sa résistance de fuite R_f ; cela permet de rendre compte du courant très faible qui passe d'une armature à l'autre à travers l'isolant.



Modèle du condensateur réel

On étudie le circuit représenté sur le schéma ci-dessous.

1- On ferme l'interrupteur.

1.1- Déterminer à la fin de la charge :

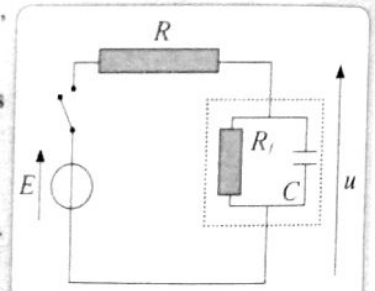
L'expression de l'intensité du courant en fonction de E, R et R_f.

1.2- En déduire $U_{C\infty}$ la tension aux bornes du condensateur à la fin de la charge.

La comparer à E.

1.3- Calculer $u_{C\infty}$ dans le cas de $E = 12V$, $R = 500\Omega$ et $R_f = 2k\Omega$.

1.4- Vers quelle valeur tend $u_{C\infty}$ dans le cas où les armatures sont séparées par un isolant parfait?



Circuit avec condensateur réel

2- On ouvre l'interrupteur à la date $t = 0$:

2.1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$.

2.2- La solution de cette équation différentielle s'écrit : $u_c(t) = u_{C\infty} e^{-t/\cdots}$

On se place dans le cas où $R << R_f$ et on prend $u_{C\infty} = E$.

Calculer R_f sachant qu'après 4 minutes la tension u_c prend la valeur $9V$.

On donne $C = 50\mu F$ et $E = 12V$.

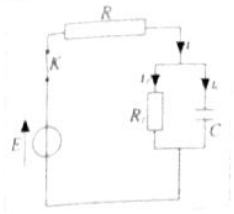
Solution

1.1- A la fin de la charge, aucun courant ne traverse le condensateur. $i_c = 0$

alors : $I = I_f$

or : $E = u_R + u_{R_f} = (R + R_f)I$

donc : $I = \dfrac{E}{R + R_f}$



1.2- $u_{C\infty} = U_{R_f} = R_f.I = \dfrac{R_f.E}{R + R_f} < E$

1.3- $u_{C\infty} = \dfrac{2.10^3}{500 + 2.10^3}.12 = 9,6V$

1.4- La résistance d'un isolant est infinie :

$U_{C\infty} = \dfrac{1}{\dfrac{R}{R_f} + 1} E$, u_c

Lorsque $R_f \to \infty$ alors : $u_{C\infty}$ tend vers E.

2.1- Lorsque R est infiniment grande :

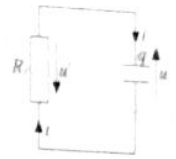
$i = \dfrac{u}{R_f} \to 0$

La loi d'additivité des tensions donne :

$u + u' = 0$,

$u + R_f.i = 0$

$u + RC\dfrac{du}{dt} = 0$



2.2-

$u = E.e^{-t/R_fC} \Rightarrow -\dfrac{t}{R_fC} = \ln\dfrac{u}{E}$

$R_f = \dfrac{t}{C.\left(\dfrac{E}{u}\right)}$

$R_f = \dfrac{4.60}{50.10^{-6}.\ln\left(\dfrac{12}{9}\right)} \simeq 16,7.10^6\Omega$

34 On considère le circuit de la figure suivante où les deux condensateurs sont initialement non chargés.

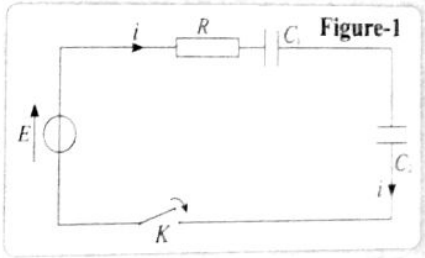


Figure-1

On donne : $E = 12V$.

On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

1- Etablir que l'équation différentielle suivante : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{\tau} i = 0$

En en exprimant la constante de temps τ en fonction de R, C_1 et C_2.

2.1- En exploitant la figure 2, déterminer l'intensité de courant i_0 au début de la charge et en déduire la valeur de R.

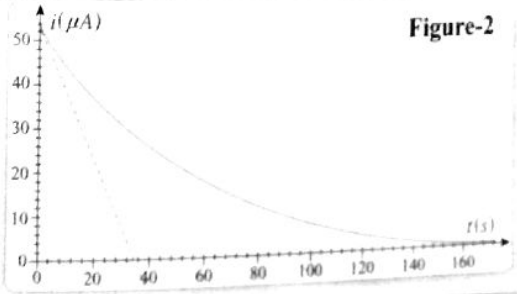


Figure-2

Scanned with CamScanner

2.2- Trouver la valeur de chacune des capacités C_1 et C_2, sachant que $C = 2C_1$.

3- L'équation différentielle précédente admet la solution $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

Déterminer l'expression de la constante A.

4- Les deux condensateurs emmagasinent au cours de la charge, à chaque instant la même charge électrique:

$q_1(t) = q_2(t) = q(t)$

Exprimer $q(t)$ en fonction de E, R, τ et t.

En déduire l'expression de q à la fin de la charge.

5- Lorsque les deux condensateurs sont montés en parallèle dans le circuit précédent, l'intensité i du courant principal dans le circuit vérifie la même équation différentielle:

$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$; avec: $\tau = R(C_1 + C_2)$.

Trouver l'expression de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R, E, C_1, C_2 et t.

Solution

1- La loi d'additivité des tensions s'écrit:

$u_{C_1} + u_{C_2} + u_R = E$

$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + Ri = E$

on a: $q_1 = q_2 = q$, alors:

$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)q + Ri = E$

Par dérivation: $\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\frac{dq}{dt} + R\frac{di}{dt} = 0$

ou encore: $\frac{di}{dt} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)i = 0$

ou bien: $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$

avec: $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2}$

ou bien: $\tau = R\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$

2.1- A $t = 0$, on a: $u_C(0) = u_{C_1}(0) = 0$, donc: $u_R(0) = Ri(0) = E$

d'où: $R = \frac{E}{i(0)} = \frac{12}{50.10^{-3}} = 2,4.10^{2}\,\Omega$

2.2- $C_1 = 2C_2$, alors: $\tau = \frac{R.2C_2}{3C_2} = \frac{2}{3}RC_2$

$C_2 = \frac{3\tau}{2R} = \frac{3.36}{2.2,4.10^{2}} = 225\mu F$;

$C_1 = 450\mu F$

3- A la date t, on écrit: $i(0) = A$;

or $i(0) = \frac{E}{R}$, donc: $A = \frac{E}{R}$.

4- On a: $\frac{dq}{dt} = i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ d'où:

$q(t) = -A\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + cte$;

à $t = 0$, $q(0) = -A\tau e^{0} + cte$, d'où:

$cte = q(0) + A\tau = 0 + A\tau = A\tau$

alors: $q(t) = A\tau\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$

$= \frac{E}{R}.\frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$

$q(t) = E.\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$

A $q(\infty) = E.\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$

5- L'équation différentielle admet la même solution: $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Le montage en dérivation de C_1 et C_2 donne: $i_1 + i_2 = i$ et $u_{C_1} = u_{C_2}$

c'est-à-dire: $i_1 + i_2 = i$ (1) et $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$ (2)

En dérivant la relation (2):

$\frac{1}{C_1}\frac{dq_1}{dt} = \frac{1}{C_2}\frac{dq_2}{dt}$, d'où $\frac{1}{C_1}i_1 = \frac{1}{C_2}i_2$

ou encore: $i_1 = \frac{C_1}{C_2}i_2$

Donc (1) donne: $i_2 + \frac{C_1}{C_2}i_2 = i$

$i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}i = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}i = \frac{C_1E}{C_1 + C_2}e^{-\frac{t}{\tau}}$

35 On considère le circuit électrique de la figure (1), composé des éléments suivants:

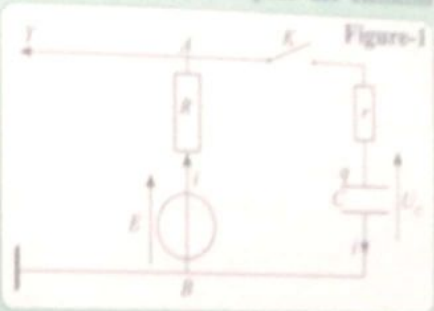


Figure-1

- Un générateur de tension constante E et de résistance interne négligeables.
- Un condensateur de capacité C, initialement non chargé.
- Deux conducteurs ohmiques de résistances respectivement R et r.
- Un interrupteur de courant K.

On ferme le circuit à un instant pris comme origine dans dates $t = 0$, et ou visualise sur l'écran d'un oscilloscope la tension u_{AB} en fonction du temps figure (2).

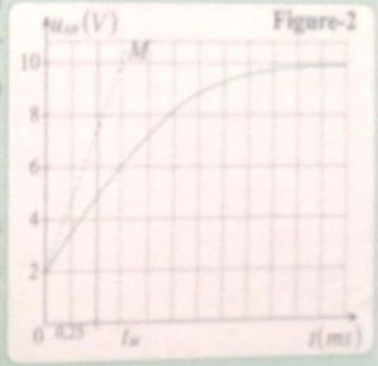


Figure-2

On donne: $R = 300\Omega$.

1- Montrer que l'intensité de courant dans ce circuit à la date $t = 0$ a pour expression $i(0) = \frac{E}{R + r}$. On pose $i(0) = I_0$.

2- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'intensité de courant à une date t peut s'écrire:

$i + (R + r)C\frac{di}{dt} = 0$

3- La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit: $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

3.1- Montrer que $\tau = (R + r)C$

Scanned with CamScanner

3.2- Etablir que l'expression de la tension $u_{AB}(t)$ s'écrit sous la forme:

$u_{AB}(t) = E\left(1 - \frac{R}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

3.3- En exploitant la figure 2:

a- Déterminer E.

b- Exprimer r en fonction de R.

3.4- Montrer que la date t_M correspondant au point M sur la figure 2, est telle que $t_M = \tau$.

3.5- En déduire la valeur de la capacité C.

4- Etablir que $u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

5- La puissance électrique consommée par le condensateur à un instant t est:

$p(t) = u_c(t).i(t)$.

5.1- Vérifier que la puissance électrique consommée par le condensateur est nulle au début de la charge à la date $t = 0$ et à la fin de la charge.

5.2- Exprimer en fonction de τ, l'instant t_m auquel la puissance consommée par le condensateur est maximale.

5.3- Trouver la valeur P_{max} de cette puissance.

Solution

1- Loi d'additivité des tensions à $t = 0$.

$u_c(0) + u(0) + u(0) = E$

$0 + ri(0) + i(0) = E \Rightarrow i(0) = \frac{E}{R+r}$

2- $u_c(t) + u_c(t) + u_R(t) = E$

$\frac{q(t)}{C} + ri(t) + Ri(t) = E$

En dérivant:

$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + (r+R)\frac{di}{dt} = 0$

$\frac{1}{C}.i + (r+R)\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i + (R+r)C.\frac{di}{dt} = 0$

3.1-

$I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + (r+R)C\left(-\frac{I_0}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$

$I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{(R+r)C}{\tau}\right] = 0 \Rightarrow 1 = \frac{(R+r)C}{\tau}$

d'où: $\tau = (R+r)C$

3.2- $u_{AB} = E + u_R = E - ri$

$= E - RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= E.R.\frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_{AB}(t) = E\left(1 - \frac{R}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

3.3-

a- $E = 10V$

b- $u_{AB}(t=0) = E\left(1 - \frac{R}{R+r}e^{0}\right)$

$= E.\frac{r}{R+r}$

3.3-

b- D'après le graphe: $u_{AB}(0) = 2V$

$E.\frac{r}{R+r} = 2 \Rightarrow \frac{r}{R+r} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$5r = R + r \Rightarrow r = \frac{R}{4}$

3.4- $\left(\frac{du_{AB}}{dt}\right)_{t=0} = Pente = \frac{E - u_{AB}(0)}{t_M - 0}$

$E\left(0 + \frac{R}{R+r}\cdot\frac{1}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right)_{t=0} = \frac{E - u_{AB}(0)}{t_M}$

$\frac{R}{R+r}\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_M}E - E\left(1 - \frac{R}{R+r}\right)$

$\frac{R}{R+r}\cdot\frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_M}E\left(1 - 1 + \frac{R}{R+r}\right)$

$\Rightarrow t_M = \tau$

3.5- $C = \frac{\tau}{R+r} = \frac{0,75.10^{-3}}{375}$;

$r = \frac{R}{4} = 75\Omega$

$C = 2.10^{-6}F = 2\mu F$

4- $u_C = E - u_R - u_r = E - (R+r)i$

$u_C = E - (R+r)I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= E - (R+r)\frac{E}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

5.1- $u(0) = 0$ et $i(0) = I_0$

$\mathcal{P}(0) = u_C(0).I_0 = 0$

$u_C(\infty) = E$; $i(\infty) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\infty) = 0$

5.2- $\mathcal{P}$ est maximale lorsque: $\frac{d\mathcal{P}}{dt} = 0$

$\mathcal{P} = u_C.i = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = -E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).\frac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + E\left(\frac{1}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right)I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$

$\frac{EI_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{EI_0}{\tau}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

$2e^{-\frac{t}{\tau}} = 1$

$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$

$e^{\frac{t}{\tau}} = 2 \Rightarrow \frac{t}{\tau} = \ln 2$

$t = \tau \ln 2$

5.3-

$\mathcal{P}_{max} = u_C(t_M).i(t_m) = E(1 - e^{-\ln 2}).I_0 e^{-\ln 2}$

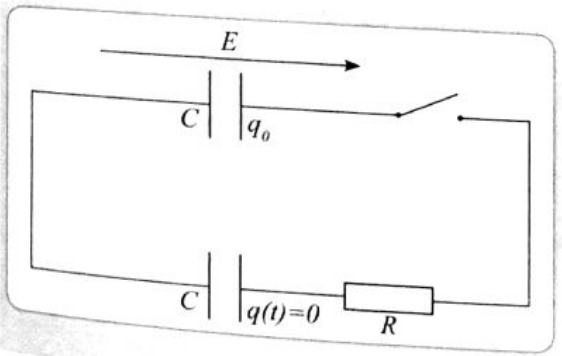
$\mathcal{P}_{max} = \frac{E^2}{R+r}(1 - e^{\ln\frac{1}{2}}).e^{\ln\frac{1}{2}}$

$= \frac{E^2}{R+r}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{E^2}{R+r}$

$= 6,6.10^{-2}W$

36 **Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur:**

On considère le montage suivant. Un condensateur de capacité C préalablement chargé sous la tension E, se décharge dans une branche pareille où sont montés en série une résistance R et un condensateur identique C. Le but de cet exercice est de déterminer l'état final du système.



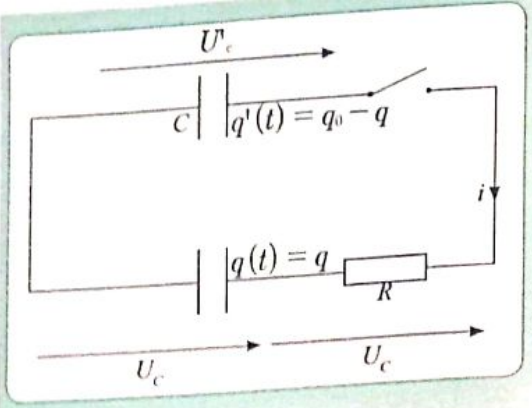
Situation initiale $t = 0$

Le condensateur du haut est chargé avec la charge $q_0 = CE$.

Le condensateur du bas ne présente aucune charge.

A la date $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

Scanned with CamScanner



Situation à $t = t$

Le condensateur du haut se décharge pendant que celui du bas se charge. La charge $(-q)$ perdue par le condensateur du haut se retrouve alors dans celui du bas.

1- Quelle relation simple existe-t-il entre U'_c, U_c et U_R?

2- Montrer alors que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ aux bornes du second condensateur s'écrit: $\frac{q_0}{2} = q + \frac{RC}{2}\frac{dq}{dt}$

3- Montrer que la solution $q(t) = \frac{q_0}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$ est solution de l'équation différentielle.

4- Que vaut quelle que soit la date t considérée la somme $q(t) + q'(t)$? En déduire l'expression de $q'(t)$.

5- Déterminer la charge aux bornes de ces deux condensateurs du bout d'un temps infiniment long. En déduire la tension aux bornes de ces condensateurs. Constater.

Solution

1- On vérifie très simplement:

$U'_c = U_c + U_R$.

2- On demande ici l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur du bas.

On sait que: $U'_c = \frac{q_0 - q}{C}$. D'autre part, $U_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$. En remplaçant ces trois expressions dans l'égalité précédente, il vient:

$\frac{q_0 - q}{C} = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$ puis,

$\frac{q_0}{C} = \frac{2q}{C} + R\frac{dq}{dt}$

Enfin, en multipliant par C l'expression précédente: $\frac{q_0}{2} = q + \frac{RC}{2}\cdot\frac{dq}{dt}$

3- La dérivée de l'expression $q(t) = \frac{q_0}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ donne:

$\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$

En remplaçant l'expression de $q(t)$ et celle de $\frac{dq}{dt}$ dans l'équation différentielle, nous avons:

$q + \frac{RC}{2}\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{RC}{2}\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= \frac{q_0}{2}$

La solution proposée vérifie donc bien l'équation différentielle.

4- La charge électrique se conserve, la somme des charges $q(t) + q'(t)$ doit être égale à la charge initiale q_0.

On vérifie donc: $q(t) + q'(t) = q_0$

On alors:

$q'(t) = q_0 - q(t) = q_0 - \frac{q_0}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$= \frac{q_0}{2}(1 + e^{-\frac{t}{\tau}})$

5-

$q(t \to \infty) = \frac{q_0}{2}$ soit $U_c(t \to \infty) = \frac{q_0}{2C}$

$= \frac{E}{2}$

$q'(t \to \infty) = \frac{q_0}{2}$ soit $U'_c(t \to \infty) = \frac{q_0}{2C}$

$= \frac{E}{2}$

Les condensateurs présentent alors des tensions égales. Ceci se vérifie dans la mesure où leur capacité sont identiques.

Scanned with CamScanner

7 DIPOLE RL

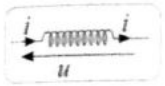
I- La bobine:

1 Présentation:

Une bobine est un dipôle électrique formé par un fil de cuivre sous forme de spires.

2 Tension électrique:

En convention récepteur, la tension électrique aux bornes d'une bobine est exprimée par la relation suivante: $u = ri + L\frac{di}{dt}$



r : résistance de la bobine, elle dépend de la longueur du fil, de sa section et de la nature du fil.

L : constante caractérisant les spires, appelée coefficient d'inductance de la bobine.

La valeur de L dépend du nombre de spires, de la surface d'une spire;

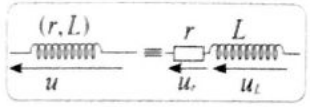
de leur surface, de la longueur de la bobine et de l'isolant dans les spires.

L'unité de L est le Henry de symbole (H).

Remarque:

La tension aux bornes d'une bobine se présente sous formes deux termes notés u_r (tension résistive) et u_L (tension inductive).

$u = u_r + u_L = ri + L\frac{di}{dt}$



3 Cas particulier: bobine idéale

Une bobine est considérée comme idéale lorsque son comportement résistif est négligeable.

En posant $r = 0$, on a $u = u_L = L\frac{di}{dt}$

4 Unité de l'inductance, équation aux dimensions:

$L = \frac{u}{\frac{di}{dt}}$, $[L] = \frac{[U][\Delta t]}{[I]}$, d'où $1H = 1.V.A^{-1}.s$

5 Comportement d'une bobine en courant continu:

En courant continu, on a $i = I = cte$, alors $\frac{di}{dt} = 0$, d'où $u = r.i$

Dans ce cas, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r.

Exercice d'application

On dispose d'une bobine de résistance $r = 20\Omega$ et de coefficient d'inductance $L = 0,5H$.

1- Déterminer la tension u aux bornes de cette bobine lorsqu'elle est traversée par un courant continu d'intensité $75mA$.

2- La bobine est traversée par un courant dont l'intensité instantanée est: $i(t) = 4t + 5.10^{-2}$ (unités S.I). Exprimer u en fonction du temps.

Déterminer dans ce cas la valeur de cette tension à la date $25ms$

Solution

1- $u = ri + L\frac{di}{dt} = ri\left(car\ \frac{di}{dt} = 0\right)$, $u = 20.75.10^{-3} = 3V$

2- On a $\frac{di}{dt} = 4$ et $L = 0,5H$; alors $u = ri + L\frac{di}{dt} = 20i + 2$

c'est à dire, $u = 20(4t + 5.10^{-2}) + 2 = 80t + 3$

A la date $t_1 = 25ms$

$u_1 = 80t_1 + 3 = 80.2,5.10^{-2} + 3 = 2 + 3 = 5V$

6 Energie magnétique emmagasinée par une bobine:

Puissance instantanée consommée par une bobine:

$p = u.i = \left(ri + L\frac{di}{dt}\right)i = ri^2 + L.\frac{di}{dt}.i = P_{th} + P_m$

P_{th} : puissance thermique due à la résistance gaspillée par effet Joule

P_m : puissance due au comportement inductif (puissance magnétique)

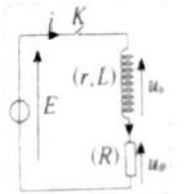
$P_m = \frac{d\mathscr{E}_m}{dt} \Rightarrow uLi.\frac{di}{dt} \Rightarrow \mathscr{E}m = \frac{1}{2}Li^2 + cte$

Si on considère que l'énergie électrique de la bobine est nulle en absence de courant, alors, la constante est nulle; d'où:

$$(J) \longrightarrow \mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2 \longleftarrow \begin{matrix}(H)\\(A)\end{matrix}$$

II- Etablissement de courant dans un circuit RL :

1 Equation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$:



Selon la loi d'additivité des tensions:

$u_b + u_R = E$

$ri + L\frac{di}{dt} + Ri = E$

Scanned with CamScanner

$(r+R)i + L\frac{di}{dt} = E$

$i + L\frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}$ (1)

2 Expression de $i(t)$:

La solution de l'équation différentielle précédente est:

$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$

On a alors $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

En revenant à (1) on écrit.

$Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B + \frac{L}{R+r}\left(-\frac{1}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R+r}$

Ou encore: $Ae^{-\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{1}{\tau}\cdot\frac{L}{R+r}\right] = \frac{E}{R+r} - B$

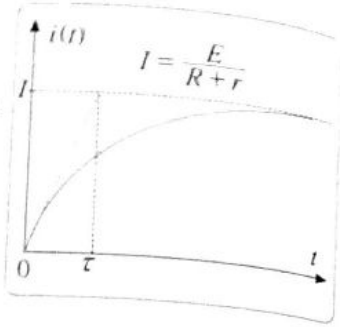
Pour que cette égalité soit vérifiée $(\forall t)$, il faut que:

$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\tau}\cdot\frac{L}{R+r} = 0 \text{ alors } \tau = \frac{L}{R+r} \text{ Constante de temps du circuit } (RL) \\ B = \frac{E}{R+r} \end{cases}$

La condition initiale $i(0) = 0$, permet d'écrire:

$i(0) = 0 = A.e + B$, ce qui donne $A = -B = -\frac{E}{R+r}$

L'expression de l'intensité de courant est $i(t) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$



$I = \frac{E}{R+r}$: intensité de courant en régime permanent.

La présence de la bobine fait retarder l'établissement de courant dans le circuit.

3 Tension $u_R(t)$:

$u_R(t) = Ri(t) = R.\frac{E}{R+R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = u_R.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

En régime permanent $u_R(t) \to u_R = RI = R.\frac{E}{R+r}$

$u_R(t)$ a la même allure que $i(t)$

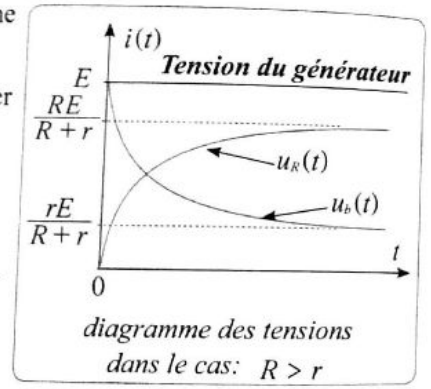


diagramme des tensions dans le cas: $R > r$

4 Tension aux bornes de la bobine:

$u_b = E - u_R = E - R.i(t) = E - R\frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$= E\left[1 - \frac{R}{R+r} + \frac{R}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = \frac{E}{R+r}[r + Re^{-\frac{t}{\tau}}]$

Remarque:

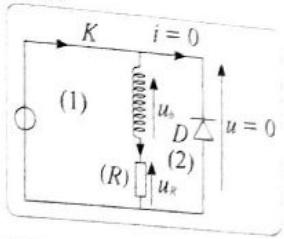
On peut établir l'équation differentielle vérifiée par $u_R(t)$ ou $u_b(t)$ en utilisant les lois d'additivité des tensions.

III- Rupture de courant dans un circuit RL :

1 Introduction:

Considérons un circuit fermé (circuit (1)).

Le courant ne passe pas dans la diode électroluminescente D.



montée dans le sens non-passant.

Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K ; la diode s'allume, témoignant l'existence d'un courant dans le circuit (2) généré par la bobine à partir de la date d'ouverture de K, à $t = 0$.

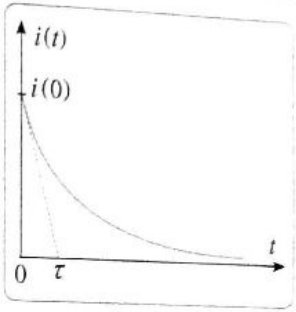
2 Equation différentielle vérifiée par $i(t)$:

Dans le circuit (2), on a:

$u_b + u_R = 0$

$ri + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$

$(R+r)i + L.\frac{di}{dt} = 0$ $\qquad i + \frac{L}{R+r}\frac{di}{dt} = 0$



3 Expression de $i(t)$:

Par analogie avec la décharge d'un condensateur on a:

$i = i(0).e^{-\frac{t}{\tau}} = I.e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\tau = \frac{L}{R+r}$

A l'ouverture du circuit, l'intensité du courant s'annulle progressivement, la bobine fait retarder la suppression du courant qui la traverse.

Scanned with CamScanner

1 Répondre par vrai (V) ou faux (F)

1- La constante de temps du dipôle RL est $\tau = \frac{L}{R}$

2- Lorsque la résistance du circuit double, alors:

2.a- τ diminue de moitié

b- τ double

3- L'unité H (Henry) représente a) $1VA.s^{-1}$ b) $1VA^{-1}.s$

4- Lorsque l'intensité du courant double, l'énergie stockée par la bobine sera:

a- doublée.

b- multipliée par quatre.

c- divisée par quatre

5- Lorsqu'on établit un courant électrique dans un dipôle RL en lui appliquant un échelon de tension croissante E; alors l'intensité I_r du courant en régime permanent:

a- dépend de E et L uniquement.

b- dépend de trois paramètres du circuit.

c- dépend de E et R uniquement.

d- sa valeur est: (1): $\frac{E}{R}$ (2): RE (3): $\frac{R}{E}$

Solution

1- : 2-a ; 3-b ; 4-b ; 5-c ; 5-d (1)

2 Compléter la phrase suivante:

La bobine est un dipôle électrique qui ..... de l'énergie magnétique pendant l'établissement d'un courant dans cette bobine Et, elle restitue cette énergie pendant ..... du circuit.

Solution

1- emmagasine (stocke) | 2- l'ouverture

3 Une bobine d'inductance $L = 20mH$ emmagasine une énergie magnétique égale à $81\mu J$ lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité I.

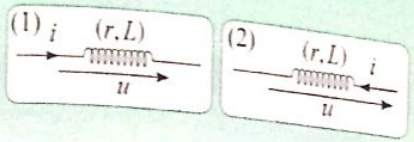
La valeur de cette intensité est:

a: $9mA$ b: $45mA$ c: $90mA$

Solution

la réponse juste est c

4 La bobine suivante est parcourue par un courant d'intensité i délivré par un générateur non représenté.



On donne:

a- $u = ri - L\frac{di}{dt}$; b- $u = ri + L\frac{di}{dt}$

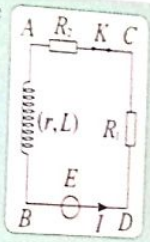
c- $u = Li + r\frac{di}{dt}$; d- $u = -ri - L\frac{di}{dt}$

Faire correspondre à chaque schéma la formule qui lui convient.

Solution

$1 \Rightarrow d$ et $2 \Rightarrow b$

5 On ferme le circuit ci-contre et on obtient lorsque le régime est établi, une intensité de courant de $35mA$.



Données: $E = 7V$; $R_1 = 20\Omega$; $r = 5\Omega$

1- Calculer la tension u_{AB} aux bornes de la bobine.

2- Calculer la valeur de la résistance R_2

3- La durée approximative pour atteindre le régime permanent est $20ms$.

Quelle est la valeur approchée de L?

Solution

1-

$u_{AB} = rI + L.\frac{dI}{dt} = rI = 5.35.10^{-3} = 0,175V$

2- Loi d'additivité des tensions:

$E = u_{DB} = u_{DC} + u_{CA} + u_{AB}$

c'est-à-dire:

$E = R_1I + R_2I + rI = (R_1 + R_2 + r)I$

D'où:

$R_2 = \frac{E}{I} - (R_1 + r) = \frac{7}{35.10^{-3}} - 25 = 175\Omega$

3- La durée approximative pour obtenir le régime permanent est 5τ.

Donc: $\tau = \frac{1}{5}\Delta t = 4ms$

$L = \tau(R_1 + R_2 + r) = 4.10^{-3}(200) = 0,8H$

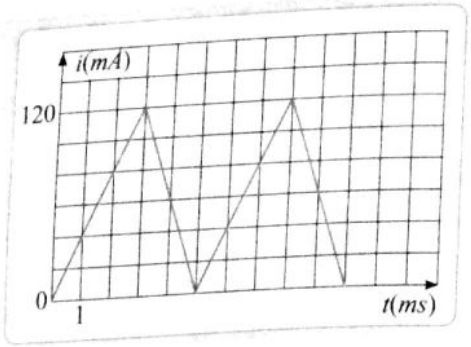
6 Une bobine d'inductance L et de résistance négligeable est parcourue par un courant d'intensité i variable comme le montre la figure suivante:

On donne $L = 7,5mH$

1- Calculer la grandeur $\frac{di}{dt}$ dans chacun des intervalles $[0,3ms]$ et $[3ms;5ms]$

2- En déduire la tension u aux bornes de cette bobine, orientée en convention récepteur.

Scanned with CamScanner



Solution

1- La grandeur $\frac{di}{dt}$ est la pente de la droite $i = f(t)$

- Dans $[3ms]$ on a:

$\frac{di}{dt} = \frac{120}{3} = 40A.s^{-1}$

- Dans $[3ms; 5ms]$ on a:

$\frac{di}{dt} = \frac{0-120}{5-3} = -60A.s^{-1}$

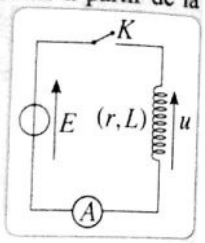
2- Dans le premier intervalle:

$u = L.\frac{di}{dt} = 7,5.10^{-3}.40 = 0,3V$

Dans le deuxième intervalle:

$u = L\frac{di}{dt} = 7,5.10^{-3}.60 = -0,45V$

7 On soumet une bobine (rL) à un échelon de tension croissante à partir de la date $t = 0$ à l'aide d'un générateur de tension constante $E = 6V$. (voir figure)



1- Etablir l'équation différentielle suivante vérifiée par l'intensité du courant, une fois, ce circuit est fermé: $i + \frac{L}{r}\frac{di}{dt} = \frac{E}{r}$

2- Lorsque le régime permanent est atteint, l'ampèremètre donne $250mA$.

Déterminer r.

3- Sachant que la valeur de la grandeur $\frac{di}{dt}$ prend à $t = 0$, la valeur $30A.s^{-1}$; déterminer la valeur de L.

Solution

1- Loi d'additivité des tensions:

$u = ri + \frac{Ldi}{dt} = E$

2- Lorsque le régime permanent s'établit, l'intensité du courant devient constante, alors: $\frac{di}{dt} = 0$

D'où: $r = \frac{E}{I} = \frac{6}{0,25} = 24\Omega$

3- À l'instant $t = 0$, l'équation différentielle s'écrit:

$i(0) + \frac{L}{r}\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{r}$

comme: $i(0) = 0$, on a alors:

$L = \frac{E}{\left(\frac{di}{dt}\right)_0} = \frac{6}{30} = 0,2H$

8 Un circuit série est constitué d'un générateur idéal de tension de fém E, d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance r, d'un conducteur ohmique de résistance r' et d'un interrupteur K. À l'instant $t = 0$, on ferme brusquement l'interrupteur K.

Données: $E = 9,0V$; $L = 36mH$; $R = r + r' = 180\Omega$.

1- Représenter le schéma du circuit et calculer la valeur I de l'intensité du courant électrique en régime permanent.

2- En régime transitoire, l'intensité i du courant peut s'écrire sous la forme: $i(t) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

2.1- Montrer que τ est homogène à un temps. Calculer sa valeur.

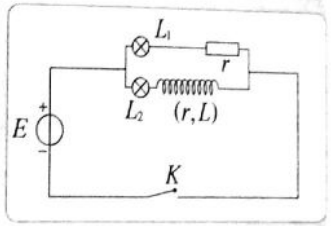
2.2- L'intensité du courant croît-elle ou décroît-elle en fonction du temps dans le circuit étudié?

2.3- En déduire les valeurs de $i(\tau)$, $i(2\tau)$, $i(3\tau)$, $i(4\tau)$ et $i(4\tau)$

Que peut-on conclure?

3- On place la bobine dans le circuit schématisé ci-dessous.

Les deux lampes, de résistance r', sont identiques.



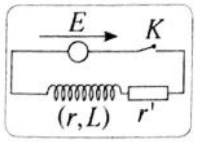
3.1- L'effet de la bobine est-il perceptible à la fermeture du circuit? Justifier.

3.2- Reprendre la question précédente si $L = 1,2H$ et $r + r' = 10\Omega$.

3.3- On introduit un noyau de fer doux dans la bobine. Que se passe-t-il alors à la fermeture du circuit?

Solution

1- Schéma du circuit:



En régime permanent $\frac{di}{dt} = 0$, $u_b = rI$

Donc:

$E = rI + r'I = RI$

$\rightarrow I = \frac{E}{R} = \frac{9}{180} = 5.10^{-2}A$

2.1- L'expression de i permet de déduire:

$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{i}{I} \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{i}{I}$

$-\frac{t}{\tau} = Ln\left(1 - \frac{i}{I}\right) \rightarrow t = -\tau Ln\left(1 - \frac{i}{I}\right)$

Scanned with CamScanner

Donc cette expression $Ln\left(1-\frac{i}{I}\right)$ est sans dimension.

Donc τ et t ont la même dimension; celle d'un temps

2.2- $\frac{di}{dt}=\frac{I}{\tau}(e^{-\frac{t}{\tau}})>0 \rightarrow (t)$ croissante.

2.3-

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
i	$0,63I$	$0,86I$	$0,95I$	$0,98I$	$0,993I$

En conclusion: A la date $t=5\tau$, le régime permanent est presque atteint.

3.1- L'effet de la bobine est d'autant plus perceptible que le régime transitoire dure plus longtemps.

Calculons donc la durée $\Delta t=5\tau$

$\Delta t=5.\frac{L}{r+r'}=5.\frac{36.10^{-3}}{180}=1ms$

cette durée est trop courte pour pouvoir percevoir le retard horaire entre l'allumage de L_2 par rapport à L_1.

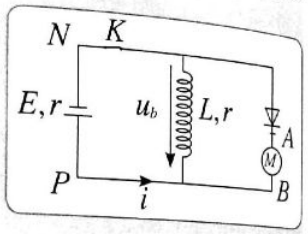
3.2-

$\Delta t=5\tau=5.\frac{L}{r+r'}=5.\frac{1,2}{10}=0,6s$

Dans ce cas, le décalage entre (L_1) et (L_2) peut être observé.

3.3- L'introduction d'un noyau de fer dans la bobine change le milieu au sein des spires, entraîne une augmentation du coefficient L et par suite τ augmente. L'effet de la bobine dans ce cas est bien observé.

9 Un générateur réel est branché aux bornes d'une bobine montée avec une diode et un moteur.



Données: $E=9,0V$; $R=r+r'=90\Omega$;

$L=1,0H$

1- Lorsque l'interrupteur est fermé, l'intensité I du courant dans le circuit est constante.

a- Calculer la valeur de I.

b- Le moteur tourne-t-il? Pourquoi?

c- Calculer l'énergie emmagasinée dans la bobine.

2- On ouvre l'interrupteur; le moteur tourne alors un court instant. Quel est le sens du courant électrique dans la portion de circuit comprenant le moteur?

3- Une masselotte de masse $m=5,0g$ est suspendue au moteur par une poulie fixée à son arbre. Calculer la hauteur h dont elle s'élève à l'ouverture du circuit. (On prendra: $g=10N.kg^{-1}$).

4- En réalité, la masselotte n'est soulevée que de $h'=7,0cm$.

Expliquer pourquoi et calculer le rendement du dispositif.

Solution

1.a- Loi d'additivité des tension:

$u_{PN}=u_b$

$E-ri=r'i+L\frac{di}{dt}$

$E=(r+r')i+L\frac{di}{dt}$

Lorsque i se stabilise:

$E=(r+r')I \rightarrow I=\frac{E}{R}=\frac{9,0}{90}=0,10A$

b- Le Moteur ne tourne pas, car le courant est bloqué dans cette branche par la diode branchée en sens non passant.

c-

$\mathscr{E}_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}.1,0(0,10)^2=5,0.10^{-3}J$

2- Le courant circule dans le moteur de A vers B.

3- Le moteur transforme l'énergie $\mathscr{E}_m$ de la bobine en énergie mécanique E_m qui sera reçue par la masse m.

Lorsqu'elle s'arrête, cette énergie E_m est sous forme d'énergie potentielle:

$E_{PP}=mgh=E_m=\mathscr{E}_m$

$\Rightarrow h=\frac{\mathscr{E}_m}{mg}=\frac{5,0.10^{-3}}{5.10^{-3}10}=10cm$

4- Cause: les frottements et l'effet Joule dans le moteur

Le rendement est:

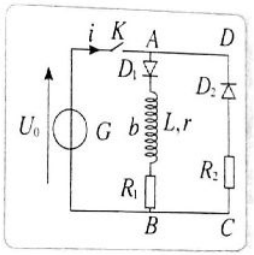
$r=\frac{E_{PP}réel}{E_{PP}idéal}=\frac{mgh'}{mgh}=\frac{7}{10}=70\%$

10 Pour étudier le comportement d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, on propose le circuit électrique de la figure (1) où:

(G) est un générateur idéal de tension constante $U_0=9V$

(D_1) et (D_2) deux diodes électroluminescentes identiques.

Chacune de ces diodes émet une lumière lorsqu'un courant électrique la traverse dans le sens passant. La tension aux bornes de ces diodes est nulle.



Ce circuit comprend également un interrupteur K et deux conducteurs ohmiques de résistance $R_1=18\Omega$ et $R_2=18\Omega$

- Expérience 1:

On ferme K à une date $t=0$

1.1- Laquelle des deux diodes s'allume? Justifier.

1.2- Déterminer l'intensité I_1 du courant électrique dans la branche AB lorsque la lumière de la diode D_1 devient uniforme.

1.3- La constante de temps du circuit de l'expérience 1 est $\tau_1=100ms$.

Vérifier que $L=1,8H$

1.4- Calculer l'énergie magnétique $\mathscr{E}_m$ emmagasinée dans la bobine à l'issue de cette expérience.

Scanned with CamScanner

- **Expérience 2:**

À une date t_1, on ouvre l'interrupteur, on constate que D_2 s'allume aussi et les deux diodes restent allumées pendant une certaine durée.

2.1- Quelle est l'origine du courant passant dans (D_2).

2.2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i dans ce cas.

2.3- En déduire l'expression de τ_2 la constante de temps de circuit.

Calculer τ_2

2.4- L'établissement du régime permanent est-il plus ou moins rapide par rapport à l'expérience 1? Justifier.

2.5- Quelle est l'influence de la constante de temps sur le comportement énergétique de la bobine dans ces deux expériences?

Solution

Expérience 1:

1.1- Lorsque K est fermé: D_1 s'allume et (D_2) est éteinte car, cette dernière est montée dans le sens non-passant.

1.2- $I_1 = \frac{U_0}{R_1} = \frac{9}{18} = 0,5A$

1.3-

$\tau_1 = \frac{L}{R_1} \Rightarrow L = \tau_1.R_1 = 0,1.18 = 1,8H$

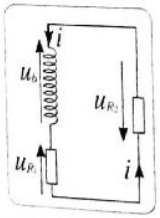
1.4-

$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}LI_1^2 = \frac{1}{2}.0,1.(0,5)^2$

$= 1,25.10^{-2}J$

-Expérience 2:

2.1- La bobine grâce à l'énergie qu'elle a stockée dans l'expérience (1), joue le rôle d'un générateur pendant une durée très brève.



2.2- Comme les tensions des diodes sont nulles, on a: $u_{(b)} + u_{(R_1)} + u_{(R_2)} = 0$

soit: $L.\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = 0$

ou encore: $i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$, avec $R = R_1 + R_2$

2.3-

$\tau_2 = \frac{L}{R_1 + R_2} = 36 = 50ms < \tau_1$

$= 100ms$

2.4- La constante de temps pendant la rupture du courant a diminué; cette étape est donc rapide.

2.5- Supposons que la durée d'obtention d'un régime permanent soit environ 5τ (établissement ou rupture de courant)

Dans l'expérience (1) la bobine stocke l'énergie déjà calculée $\mathscr{E}_{max}$ pendant $\Delta t_1 \simeq 5\tau_1 \simeq 0,5s$.

Alors que dans l'expérience (2) cette même énergie est restituée pendant une durée plus petite $\Delta t_2 = 5\tau_2 = 0,25s$

11 On fait passer dans une bobine de résistance négligeable, un courant électrique variable délivré par un générateur à basse fréquence (GBF) fonctionnant en mode triangulaire. Le circuit réalisé comprend un conducteur ohmique de résistance $R = 100\Omega$ fig-(1)

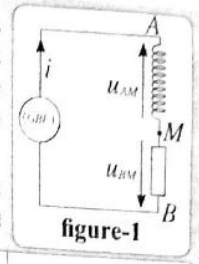


figure-1

A l'aide d'un oscilloscope bicourbe on visualise la tension aux bornes de la bobine sur la voie y_1 et la tension aux bornes du conducteur ohmique sur la voie Y_2. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 2 et 3.

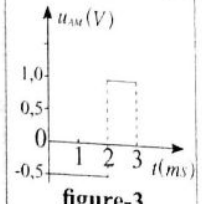


figure-3

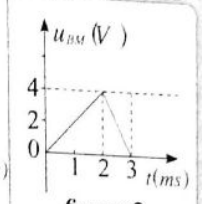


figure-2

1- Préciser à l'aide du schéma du circuit, comment est branché l'oscilloscope.

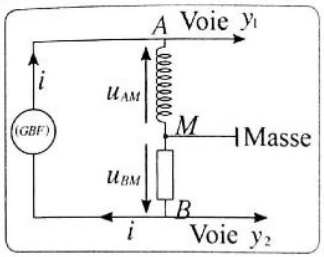
2- Montrer que la tension u_{AM} peut s'écrire:

$u_{AM} = -\frac{L}{R} \times \frac{du_{BM}}{dt}$

3- Vérifier que le coefficient d'inductance de la bobine est $L = 25.mH$.

Solution

1- Branchement de l'oscilloscope:



2- Tension de la bobine en convention récepteur $(r = 0): u_{AM} = L.\frac{di}{dt}$

Tension aux bornes du conducteur ohmique orienté ici, en convention générateur:

$u_{BM} = -Ri$: d'où: $i = -\frac{1}{R}u_{BM}$ et

$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{du_{BM}}{dt}$

La tension u_{AM} s'écrit alors:

$u_{AM} = L.\frac{di}{dt} = -\frac{L}{R}.\frac{du_{BM}}{dt}$

3- Graphiquement; dans le même intervalle $[0, 2ms]$

- $u_{AM} = -0,5V$
- $u_{BM} = K.t$, d'où

$\frac{du_{BM}}{dt} = K = \frac{4}{2.10^{-3}} = 2.10^3 V/s$

Alors: $L = -\frac{R.u_{AM}}{\frac{du_{BM}}{dt}} = -\frac{R.u_{AM}}{K}$

$L = -\frac{100.(-0,5)}{2.10^3} = 25.10^{-3}H = 25mH$

12 Un dipôle AC est composé par l'association en série d'une bobine de résistance r et de coefficient d'induction L et d'un résistor de résistance $R = 40\Omega$.

On alimente ce dipôle par un générateur de tension constante E (fig 1).

On ferme le circuit à la date $t = 0$, où les points A, B, et C sont reliés à un ordinateur muni d'un logiciel et d'un système d'acquisition des données.

Les résultas obtenus sont présentés sur la figure (2).

Scanned with CamScanner

1- Quelles sont les tensions visualisées sur l'écran de l'ordinateur?

Faites associer chacune de ces tensions à la courbe qui lui convient.

2- Calculer la tension aux bornes de la bobine aux dates suivantes:

$t_0 = 0$; $t_1 = 5ms$ et $t > 10ms$

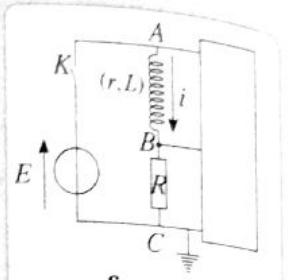


figure-1

3- Tracer dans le même repère les variations de u_{AB} en fonction de t.

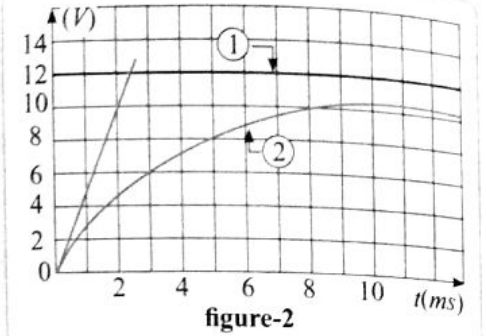


figure-2

4- Déterminer l'intensité I du courant lorsque le régime permanent est atteint.

5- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i est:

$i + \tau \frac{di}{dt} = A$

avec: $\tau = \frac{L}{Rt_0}$ et $A = \frac{E}{R+r}$

6- Déterminer r et L.

Solution

1- Les tensions visualisées sont u_{BC} et u_{AC}

$u_{AC} = E$: tension aux bornes du générateur

u_{BC} : tension aux bornes du dipôle R.

2- Utilisons la loi d'additivité des tensions:

On a: $u_{AB} + u_{BC} = u_{AC} = E$

à chaque date: $u_{AB} = E - u_{BC}$

à $t_0 = 0$:

$u_{AB}(o) = E - u_{BC}(o) = E - o = E = 12V$

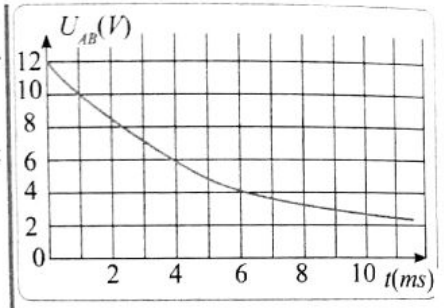
à $t_1 = 5ms$: $u_{AB}(t_1) = E - u_{BC}(t_1)$

$= 12 - 8 = 4V$

à $t > 10ms$

$u_{AB} = E - u_{BC}(\max) = 12 - 10 = 2V$

3- **Allure de u_{AB} en fonction du temps:**



4- L'application de la loi d'ohm au dipôle BC en régime permanent donne:

$I = \frac{u_{BC}(\max)}{R} = \frac{10}{40} = 0,25A$

5- Loi d'additivité des tensions:

$u_{AB} + u_{BC} = u_{AC} = E$

$ri + L.\frac{di}{dt} + Ri = E$

$(r+R)i + L\frac{di}{dt} = E$

$i + \frac{L}{R+r}\cdot\frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}$

En posant $\frac{L}{R+r} = \tau$ et $\frac{E}{R+r} = A$

On obtient: $i + \tau\frac{di}{dt} = A$

6- Considérons cette équation en régime permanent:

$\frac{di}{dt} = 0$, d'où $i = I = A = \frac{E}{R+r}$

Donc: $R + r = \frac{E}{I}$

et: $r = \frac{E}{I} - R = \frac{12}{0,25} - 40 = 8\Omega$

Exploitons l'expression de τ.

On a: $\tau = \frac{L}{R+r}$ d'où $L = \tau(R+r)$

D'après le graphe $\tau = 2.10^{-3}s$

$L = 2.10^{-3}(40+8) = 9,6.10^{-2}H$

13 On considère la figure (1) composée des dipôles suivants:

- Une bobine de résistance r et d'inductance L.
- Un conducteur ohmique de résistance $R = 10\Omega$
- Un générateur de tension constante $E = 9V$
- Deux diodes idéales identiques dont la caractéristique est schématisée sur la figure (2).

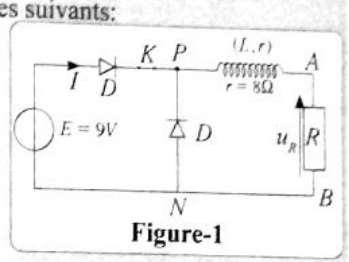


Figure-1

1- Le circuit étant fermé. Déterminer l'intensité I_0 du courant traversant la bobine lorsque le régime permanent est atteint.

2- A une date $t = 0$, on ouvre le circuit. Un oscilloscope a permis de suivre les variations de la tension u_R en fonction du temps. (figure 3)

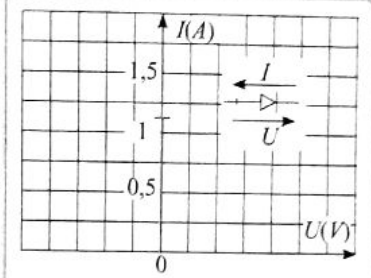


figure-2

2.1- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} = 0$

2.2- Cette équation admet comme solution l'expression $i(t) = Ae^{\frac{-t}{\tau}}$

2.2.1- Déterminer la valeur de la constante A.

2.2.2- Exprimer τ en fonction de L, r et R.

2.3- Considérons la date t_1 où la tension u_R prend 90% de sa valeur maximale et la date t_2 où u_R prend 60% de sa valeur maximale.

2.3.1- Exprimer la durée $\Delta t = t_2 - t_1$ en fonction de τ.

2.3.2- Calculer la valeur de τ et en déduire celle de L.

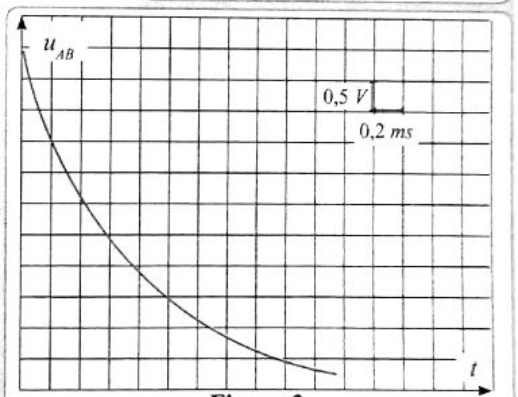


Figure-3

Scanned with CamScanner

Solution

1- La tension aux bornes de chacune des diodes est nulle

Lorsque le régime permanent est atteint:

$u_{AB} = E = u_{AC} + u_{AB} = rI_0 + L\frac{dI_0}{dt} + RI_0$

D'où $I_0 = \frac{E}{R+r} = \frac{9}{18} = 0,5A$

2.1- A l'ouverture du circuit:

$u_{AC} + u_R = 0$

Alors $ri + \frac{Ldi}{dt} + Ri = 0$

D'ou $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = 0$

2.2.1- A l'instant $t = 0$, $i(0) = A$

Or, le courant qui traverse le circuit à l'ouverture du circuit est I_0

D'ou $A = I_0 = 0,5A$

2.2.2- En tenant compte de la solution, on a:

$\frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{1}{\tau}i$

D'ou $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0$

Par analogie avec l'équation différentielle on déduit que: $\frac{R+r}{L} = \frac{1}{\tau} \Longrightarrow \tau = \frac{L}{R+r}$

2.3.1- On a:

$u_R = Ri = RI_0e^{-\frac{t}{\tau}} = u_R(\max)e^{-\frac{t}{\tau}}$

A la date t_1: $u_R(t_1) = u_R(\max)e^{-\frac{t_1}{\tau}}$

Et a la date t_2: $u_R(t_2) = u_R(\max)e^{-\frac{t_2}{\tau}}$

On peut écrire:

$\frac{u_R(t_1)}{u_R(t_2)} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{e^{-\frac{t_2}{\tau}}} = e^{-\frac{t_1-t_2}{\tau}} = e^{\frac{\Delta t}{\tau}}$

D'où:

$\Delta t = \tau Ln\frac{u_R(t_1)}{u_R(t_2)} = \tau Ln\frac{90}{60} = \tau Ln6$

Graphiquement on tire: $t_1 = 0,4ms$ et $t_2 = 1,6ms$

Donc: $\tau = \frac{\Delta t}{Ln9} = \frac{1,2}{Ln6} = 0,67ms$

2.3.2- $L = \tau(R+r) = 37mH$

14 On réalise le montage de la figure suivante et on ferme le circuit à la date $t = 0$

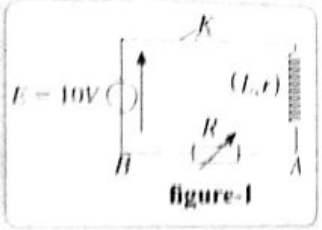


figure-1

1- Que signifie la flèche représentée sur le dipôle placé entre A et B ?

2- Montrer que l'intensité du courant circulant dans ce circuit vérifie l'équation différentielle suivante:

$\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L}$

3- Montrer que l'intensité $i(t)$ prend dans le régime permanent une valeur maximale $I_0 = \frac{E}{R+r}$

4- En donnant à la résistance R des valeurs différentes 40Ω, 90Ω et 140Ω, on a obtenu les courbes de la figure (2).

Remplir le tableau suivant:

Valeur de $R(\Omega)$	40	90	140
numéro de la courbe			

5- Déterminer la valeur de la résistance r en exploitant la courbe (2).

6- La constante de temps de ce circuit est $\tau = \frac{L}{R+r}$

Montrer que τ a la dimension de temps.

7- Retrouver ce résultat en utilisant l'équation différentielle.

8- La droite (Δ) représente la tangente à la courbe (2) à la date $t_0 = 0$.

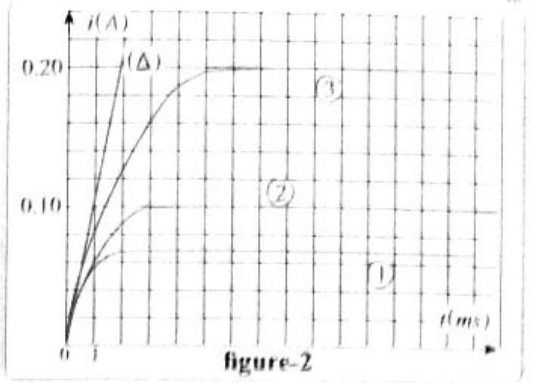


figure-2

Solution

1- La flèche sur le symbole du conducteur ohmique, signifie que la valeur de R est réglable.

2- La loi d'additivité des tensions permet d'écrire:

$u_{AC} + u_R = E \longrightarrow ri + L\frac{di}{dt} + Ri = E$

C'est-à-dire: $(R+r)i + L\frac{di}{dt} = E$

ou encore: $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L}$

3- Une fois le régime permanent s'établit, le courant devient continu, d'intensité I_0:

En posant $\frac{di}{dt} = 0$, on obtient $i = I_0 = \frac{E}{R+r}$

4- On constate d'après l'expression de I_0 que I_0 et R varient en sens inverse:

Lorsque R I_0

Donc, à la valeur de R la plus faible, correspond l'intensité I_0 la plus grande et inversement.

Valeur de $R(\Omega)$	40	90	140
courbe correspondante	(3)	(2)	(1)

5- Sur la courbe (2) on a $I_0 = 0,10A$

L'expression $I_0 = \frac{E}{R+r}$ donne:

$r = \frac{E}{I_0} - R$

$r = \frac{10}{0,1} - 90 = 10\Omega$

6- Equation aux dimensions:

$[\tau] = \frac{[L]}{[R+r]}$

Loi d'ohm $[R+r] = \frac{[U]}{[I]}$

On tire l'expression de L à partir de l'expression de U_L la plus simple (bobine idéale) $U = L\frac{di}{dt} \longrightarrow [U] = [L]\frac{[I]}{[\Delta t]}$

D'où $[L] = \frac{[U][\Delta t]}{[I]}$

Donc: $[\tau] = \frac{[U][\Delta t]}{[I]} = \frac{1}{\frac{[U]}{[I]}} = [\Delta t]$

7- L'équation différentielle établie

Scanned with CamScanner

précédemment est : $\frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L} i = \frac{E}{L}$

On l'écrit aussi : $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{L}$ (2)

Dans une somme ou une différence, tous les termes ont la même dimension, d'où

$\left[\frac{di}{dt}\right] = \left[\frac{i}{\tau}\right] = \left[\frac{E}{L}\right]$

La première égalité entraine

$[\tau] = \left[\frac{i}{\frac{di}{dt}}\right] = \left[\frac{i}{\frac{i}{\Delta t}}\right] = [\Delta t]$

8- D'après l'équation différentielle (2) à la date $t = 0$, on a

$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 + \frac{1}{\tau} i(0) = \frac{E}{L}$

$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L} \Longrightarrow L = \frac{E}{\left(\frac{di}{dt}\right)_0}$

Droite (Δ) : $\left(\frac{di}{dt}\right)_0$ = pente

$= \frac{0,1A}{1ms} = 100\ A/s$

D'où $L = \frac{10}{100} = 0,1H$

15 **Dans le montage schématisé ci-contre, les diodes D_1 et D_2 sont supposées idéales $u_{D_2} = 0$ quand la diode est passante). On étudie le comportement de la bobine dans les deux situations suivantes**

1- A l'instant $t = 0$, la tension aux bornes du générateur varie brusquement de la valeur 0 à la valeur E. L'intensité du courant électrique traversant le circuit s'écrit alors : $i(t) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, avec $I = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

1.1- Montrer que $u_b(t) = i(r + Re^{-\frac{t}{\tau}})$

1.2- Que devient cette tension à la date $t = 0$?

1.3- Que devient cette tension lorsque le régime permanent est établi ?

1.4- Que devient $u_b(t)$ en régime permanent, si on néglige la résistance de la bobine par rapport à R ?

2- A un instant pris comme nouvelle origine des temps, la tension aux bornes du générateur s'annule brusquement. L'intensité du courant électrique traversant le circuit s'écrit alors :

$i(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $I = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$ (t est repéré par rapport à la nouvelle origine des temps)

2.1- Que se passe-t-il dans le circuit à $t = 0^+$?

2.2- Déterminer l'expression de la tension $u_b(t)$ aux bornes de la bobine.

2.3- Quelle est l'expression de la tension u_b à l'instant initial ? quand le régime permanent est établi ?

2.4- comment se comporte la bobine à l'instant initial ?

Solution

1.1-

$u_b(t) = ri + L\frac{di}{dt} = ri(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + L\frac{I}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= ri + (I(R+r) - ri)e^{-\frac{t}{\tau}} = I(r + Re^{-\frac{t}{\tau}})$

1.2- A la date $t = 0$: $u_b(0) = I(r + R) = E$

1.3- Pendant le régime permanent : $u_b(\infty) = u_b(\min) = ri = \frac{rE}{R+r}$ car $e^{-\infty} = 0$

1.4- Si $r = 0$ on aura $u_b = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

Et, lorsque $t \to \infty \Longrightarrow u_b = 0$

2.1- Le courant ne s'annule pas brusquement, son intensité diminue progressivement.

2.2- $u_b = ri + L\frac{di}{dt} = rIe^{-\frac{t}{\tau}} + -\frac{LI}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= (rI - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= E\left(\frac{r}{R+r} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= -\frac{R}{R+r}Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

2.3- $u_b(0) = -\frac{RE}{R+r}$

$u_b(\infty) = 0$

2.4- Dans ce montage, la bobine est orientée en convention récepteur, sa tension est négative : $u_b(0) = -\frac{RE}{R+r}$

Si on l'oriente en convention générateur. Elle peut être assimilée à un générateur de f.e.m : $e = \frac{RE}{R+r}$

16 **Le montage de la figure-1 comprend :**

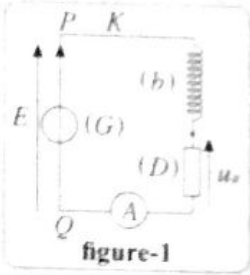


figure-1

- **Un générateur** (G) idéal de tension de f.e.m E.
- **Une bobine** (b) de coefficient d'inductance L et de résistance r.
- **Un conducteur ohmique** (D) de résistance R.
- **Un ampèremètre** de résistance négligeable.
- **Un interrupteur** K.
- **On ferme le circuit à l'aide de l'interrupteur** K **à une date prise comme origine du temps** $t = 0$ **et on visualise sur l'écran d'un oscilloscope à mémoire, les valeurs de la tension** $u_{PQ}(t)$ **aux bornes du générateur** (G) **et celles de la tension** $u_R(t)$ **aux bornes du conducteur ohmique** (D).

Les courbes (1) et (2) obtenues sont présentées sur la figure-2

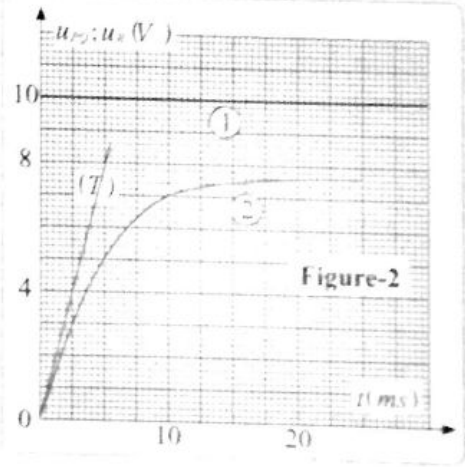


Figure-2

La droite (T) **sur cette figure est la tangente à la courbe (2) à la date** $t = 0$.

Lorsque le régime permanent est atteint, l'ampèremètre indique la valeur $I = 0,1A$.

1- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension u_R **s'écrit sous la forme** $L\frac{du_R}{dt} + (R + R)u_R - ER = 0$

2- Sachant que cette équation différentielle admet pour solution la fonction :

Scanned with CamScanner

$u_R = U_0(1 - e^{-\lambda t})$

Trouver l'expression des constantes U_0 et λ en fonction des paramètres de ce circuit.

3- Exprimer r (résistance de la bobine) en fonction de E, I et U_0.

Calculer r.

4- Exprimer $\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0$ la dérivée de u_R par rapport au temps à la date $t = 0$, en fonction de E, U_0, I et L.

En déduire la valeur de L.

Solution

1- Appliquons la loi d'additivité des tensions:

$(1)\ u_R + u_b = E$ avec: $u_R = Ri$

et $u_b = ri + L.\frac{di}{dr}$

alors: $i = \frac{1}{R}u_R$ et $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

Donc: $u_b = ri + L.\frac{di}{dt} = r.\frac{1}{R}u_R + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt}$

En revenant à la relation (1) on a:

$u_R + \frac{r}{R}u_R + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} = E$

$u_R\left(1 + \frac{r}{R}\right) + \frac{L}{R}\frac{dur}{dt} = E$

$u_R\left(\frac{R+r}{R}\right) + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} = E$

D'où: $L.\frac{du_R}{dt} + (R+r)u_R - RE = 0$

2- Remplaçons la solution u_R et sa dérivée dans l'équation différentielle:

$LU_0\lambda e^{-\lambda t} + (R+r)U_0(1 - e^{-\lambda}t) - ER = 0$

$U_0e^{-\lambda t}[L\lambda - (R+r)] = ER - (R+r)U_0$

D'où: $L\lambda = R + r$; ce qui donne:

$$\lambda = \frac{R+r}{L}$$

Et $ER - (R+r)U_0 = 0$; ce qui donne:

$$U_0 = \frac{R}{R+r}E$$

3- Puisque l'équation différentielle est valable à chaque instant, on l'applique en régime permanent lorsque u_R devient constant et par suite $\frac{du_R}{dt} = 0$

On écrit alors:

$L.\left(\frac{du_R}{dt}\right)_\infty + (R+r)u_R(\infty) = RE$

La solution donne:

$u_R(\infty) = u_0(1 - e^{-\lambda\infty}) = u_0$

Donc: $(R+r)u_0 = RE$

Alors: $r = \frac{RE}{u_0} - R = R\left(\frac{E}{u_0} - 1\right)$

Et d'après la loi d'ohm appliquée au dipôle (D) en régime permanent: on a $R = \frac{u_0}{I}$

D'où: $r = \frac{u_0}{I}\left(\frac{E}{u_0} - 1\right) = \frac{E - u_0}{I}$

AN: $r = \frac{10 - 7,6}{0,1} = 24\Omega$

4- A la date $t = 0$, l'équation différentielle s'écrit: $L\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0 + (R+r)u_R(0) = RE$

Comme $u_R(0) = 0$, on déduit que:

$\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0 = R\frac{E}{L} = \frac{u_0}{I}\cdot\frac{E}{L}$

Or $\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0 = K$: pente de la tangente à la courbe $u_R(t)$ à l'instant $t = 0$

$\left(\frac{du_R(t)}{dt}\right)_0 = \frac{7,6 - 0}{5.10^{-3} - 0} = 1,52.10^3 V.s^{-1}$

D'où:

$L = \frac{U_0E}{I.\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0} = \frac{7,6.10}{0,1.1,52.10^3} = 0,5H$

17 Le montage de la figure ci-contre comprend:

- Une bobine b de résistance r et de coefficient d'auto-induction L.
- Un conducteur ohmique de résistance R variable.
- Un générateur idéal de tension constante E.
- Un ampèremètre de résistance négligeable.
- Un interrupteur K.

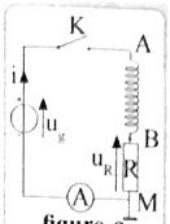


figure-a

On ferme le circuit à la date $t = 0$.

1- Montrer que la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique BM vérifie l'équation différentielle suivante:

$u_R + \frac{L}{R+r}\frac{du_R}{dt} = \frac{RE}{R+r}$

2- Sachant que la solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme: $u_R(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

- Exprimer U_0 en fonction R, r et E et τ en fonction de L, r et R.

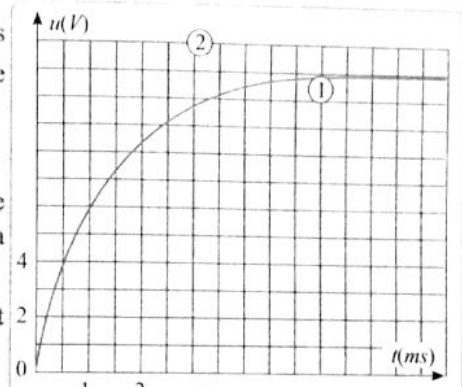


figure-b

3- On fixe la tension du conducteur ohmique sur la valeur $R = R_1$ et on visualise sur un oscilloscope les deux tensions u_r et u_{AB}.

- Les résultats obtenus sont présentés sur la figure b.
- En même temps l'indication affichée par l'ampèremètre se stabilise sur la valeur $I_1 = 50mA$.

3.1- Justifier que la courbe (1) représente la tension u_R.

- Quelle est la valeur de E?

3.2- Calculer la valeur de R_1.

3.3- Etablir que: $r = R_1\left(\frac{E}{U_0} - 1\right)$. Calculer r.

3.4- En vous aidant de la courbe (1). Déterminer la valeur de L.

4- On reprend une deuxième expérience en donnant à la résistance R une valeur R_2 dans le but d'obtenir un régime transitoire plus rapide.

4.1- Comparer en justifiant les deux valeurs R_2 et R_1.

4.2- On donne à R_2 une valeur permettant d'avoir $\tau_2 = \frac{1}{4}\tau_1$.

4.2.1- Déterminer R_2.

4.2.2- Quelle est l'intensité I_2 du courant dans le circuit lorsque le régime permanent est établi?

Scanned with CamScanner

1- En appliquant la loi d'additivité des tensions on écrit:

(1) $u_C + u_b = E$

Or, $u_b = ri + L\dfrac{di}{dt}$ et $i = \dfrac{1}{R}u_R$

donc: $u_b = r.\dfrac{1}{R}u_R + L.\dfrac{1}{R}\dfrac{du_R}{dt}$

(1) devient: $u_R + \dfrac{r}{R}u_r + \dfrac{L}{R}\dfrac{du_R}{dt} = E$;

c'est-à-dire: $u_R\left(1+\dfrac{r}{R}\right) + \dfrac{L}{R}\dfrac{du_R}{dt} = E$

Ou bien: $u_R(r+R) + L\dfrac{du_R}{dt} = RE$

D'où: $u_R + \dfrac{L}{r+R}\dfrac{du_R}{dt} = \dfrac{R}{r+R}E$

2- La solution proposée donne:

$\dfrac{du_R}{dt} = \dfrac{U_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

En revenant à l'équation différentielle on a: $U_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + \dfrac{L}{R+r}.\dfrac{U_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{RE}{R+r}$

$U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left[\dfrac{L}{R+r}.\dfrac{1}{\tau} - 1\right] = \dfrac{RE}{R+r} - U_0$

Cette égalité ne peut être vérifiée que lorsque: $\dfrac{RE}{R+r} - U_0 = 0$, ce qui donne: $U_0 = \dfrac{RE}{R+r}$

Et, $\dfrac{L}{R+r}.\dfrac{1}{\tau} - 1 = 0$ ce qui donne $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

3.1- D'après la solution $u_R(t) = U_0(1-e^{\frac{t}{\tau}})$ on remarque bien que $u_R(0) = 0$.

La courbe de $u_R(t)$ passe par l'origine, il s'agit donc de la courbe (1)

La courbe (2) est celle de u_g,

d'où: $E = 12V$

3.2- La loi d'Ohm appliquée à BM donne:

$R_1 = \dfrac{u_R}{I_1} = \dfrac{11}{50.10^{-3}} = 220\Omega$

3.3- Lorsque le régime permanent est établi dans ce circuit: $u_b = ri = rI_1$

et $u_R = U_0 = R_1 I_1$

L'additivité des tensions s'écrit alors:

$rI_1 + U_0 = E$

Avec: $I_1 = \dfrac{U_0}{R_1}$, on obtient:

$r.\dfrac{U_0}{R_1} + U_0 = E$

Ou encore: $\left(\dfrac{r}{R_1}+1\right)U_0 = E$

Ou bien: $\dfrac{r}{R_1} = \left(\dfrac{E}{U_0} - 1\right)$

D'où: $r = \left(\dfrac{E}{U_0} - 1\right)R_1$

A.N: $r = \left(\dfrac{12}{11} - 1\right).220 = 20\Omega$

3.4- La tangente n'est pas tracée sur la figure b. On doit utiliser l'expression de $u_R(t)$ à la date $t = \tau$

$u_R(\tau) = U_0(1-e^{-1}) = 0,63U_0 = 6,95V$

La courbe (1) donne $\tau \simeq 1ms$

D'où:

$L = (R_1 + r)\tau = 240.10^{-3} = 0,24H$

4.1- Pour atteindre un régime permanent plus rapidement, il faut diminuer la constante τ.

Or τ et R variante en sens inverse $\left(\tau = \dfrac{L}{R+r}\right)$.

Donc: le régime permanent est plus vite atteint, pour des valeurs de R plus grandes.

4.2- La condition $\tau_2 = \dfrac{1}{4}\tau_1$ entraîne:

$\dfrac{L}{R_2+r} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{L}{R_1+r} \rightarrow 4R_1 + 4r = R_2 + r$

D'où: $R_2 = 4R_1 - 3r = 4.220 - 3.20$

$= 820\Omega$

18 On réalise le montage expérimental de la figure (1), dans le but d'obtenir l'établissement du courant électrique dans un dipôle AB; constitué d'un conducteur ohmique de résistance R et d'une bobine de coefficient d'induction L et de résistance r. Un générateur idéal applique une tension constante $E = 6,0V$ aux bornes du dipôle.

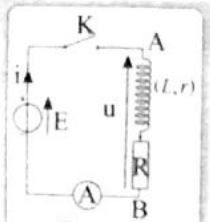


figure-1

1.1- On règle la résistance R sur la valeur $R = 150\Omega$ et on ferme le circuit à un instant pris comme origine des dates ($t = 0$).

Un appareillage convenable a permis d'obtenir les variations de l'intensité de courant i au cours du temps figure (2).

Sur cette figure la droite (T) tangente à la courbe de $i(t)$ à la date $t = 0$ a comme coefficient directeur $a = 100A.s^{-1}$.

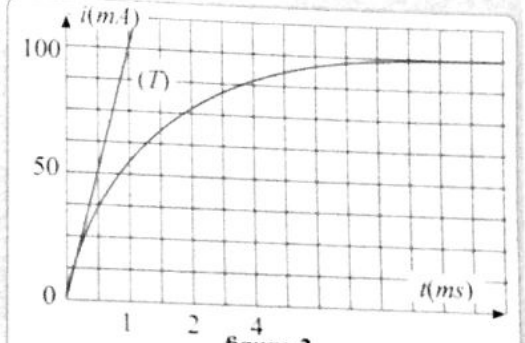


figure-2

La tension u aux bornes du dipôle AB est exprimée par la relation:

$u = (R+r)i + L.\dfrac{di}{dt}$

1- La grandeur $\left(L.\dfrac{di}{dt}\right)$ augmente-t-elle ou diminue-t-elle au cours du régime transitoire? justifier.

1.2- Exprimer $\left(\dfrac{di}{dt}\right)$ à la date $t = 0$; en fonction de E et L

Déterminer la valeur de L.

1.3- Que vaut $\dfrac{di}{dt}$ pour une date $t > 5ms$?

En déduire la valeur de r.

2- On reproduit le même montage précédent en faisant varier la valeur de L et celle de R comme c'est indiqué dans le tableau ci-après:

	$r(\Omega)$	$R(\Omega)$	$L(H)$
1er cas	10	50	$L_1 = 6,0.10^{-2}$
2ème cas	10	50	$L_2 = 1,2.10^{-1}$
3ème cas	10	30	$L_3 = 4,0.10^{-2}$

La figure 3 regroupe les courbes (a), (b) et (c) relatives à ces trois expériences.

2.1- Faire correspondre à chacun de ces trois cas, en justifiant, la courbe qui lui convient.

Scanned with CamScanner

2.2- Quelle valeur R'_2 faut-il donner à R_2 pour que le 2ème et le 3ème cas, aient la même constante de temps.

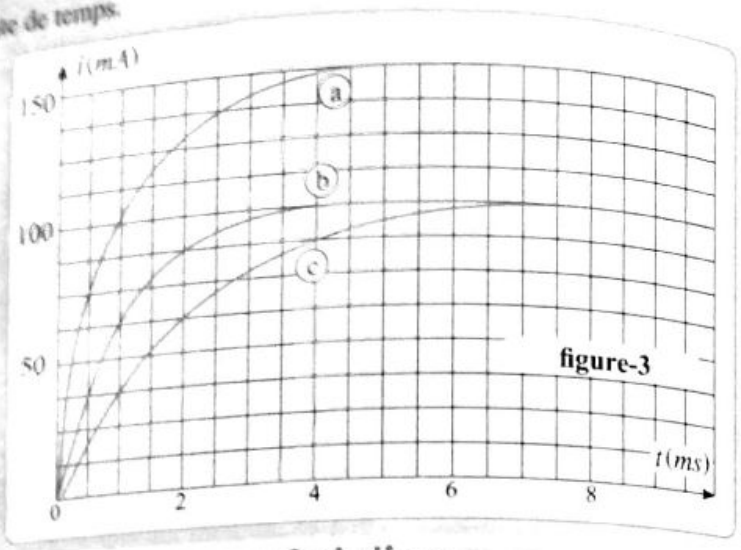


figure-3

Solution

1.1- Dans l'equation différentielle proposée:

$u = (R+r)i + L\frac{di}{dt}$ (1)

u et u est constante $u = E$

i et $\frac{di}{dt}$ sont des fonctions variant en sens opposés.

Et puisque $i = f(t)$ est croissante (fig 2), la fonction $L\frac{di}{dt}$ est décroissante en fonction de t.

L étant positif, donc $\frac{di}{dt}$ décroît avec t.

1.2- On a la date $t = 0$

$u = E = (R+r)i(0) + L\left(\frac{di}{dt}\right)_0$

comme $i(0) = 0$, on tire: $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}$,

d'où: $L = \frac{E}{\left(\frac{di}{dt}\right)_0}$

AN: $L = \frac{6,0(V)}{100(A.s^{-1})} = 6,0.10^{-2}H$

1.3- En régime permanent: $\frac{di}{dt} = 0$, d'où $E = (R+r)I_{max}$

Donc: $r = \frac{E}{I_{max}} - R = \frac{6}{0,1} - 50 = 10\Omega$

2.1- Le résultat: $E = (R+r)I_{max}$ donne:

$I_{max} = \frac{E}{R+r}$

Cette expression permet de constater que I_{max} est indépendant de L, et dépend uniquement de R tant que E et r sont gardés constants.

- La courbe (a) correspond donc à la résistance la plus petite
- Les courbes (b) et (c) correspondent donc aux deux premiers cas ayant la même valeur de R; qui est $R_1 = R_2 = 50\Omega$

Or la courbe (b) a la dérivée à l'origine $\frac{di}{dt}$ la plus grand (la pente la plus grande).

Et en revenant à: $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}$; ou déduit que: $\left(\frac{di}{dt}\right) \nearrow L \searrow$

On déduit que le 1er cas $L_1 = 6.10^{-2}H$ lui correspond la courbe (b) et le 2ème cas, courbe (c).

2.2- La condition $\tau_2 = \tau_3$ permet d'écrire: $\frac{L_2}{R'_2 + r} = \frac{L_3}{R_3 + r} \Rightarrow R'_2 = \frac{L_2}{L_3}(R_3 + r) - r$

$R'_2 = \frac{1,2.10^{-1}}{4.10^{-2}}(30+10) - 10 = 110\Omega$

19 On donne le circuit de la figure (1) où:

- (B) est une bobine d'inductance L et de résistance τ
- (D) est un conducteur ohmique de résistance R réglable.
- (G) un générateur à basse fréquence
- K un interrupteur.

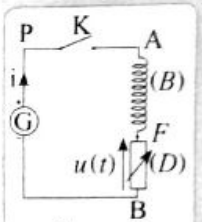


figure-1

On fixe la résistance R sur la valeur $R = 200\Omega$ et on ferme le circuit à une date $t = 0$,

le générateur applique au dipôle PQ une tension périodique ascendante E pendant la première demi-période puis nulle pendant la deuxième demi-période suivante.

La figure (2) donne les variations au cours du temps des deux tensions u_{PQ} et u

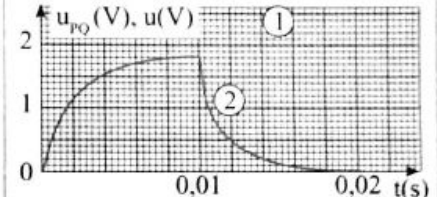


figure-2

1- Justifier que la courbe (2) est celle de $u(t)$.

2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

3- Trouver les expressions des deux constantes A et τ sachant que $u = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

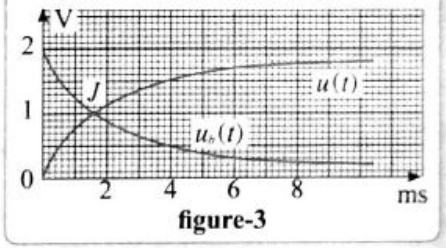


figure-3

3.1- Déterminer en utilisant la figure (2) les valeurs de A et τ.

3.2- Déterminer la valeur de L sachant que $r = 22,2\Omega$

4- On a représenté sur la figure (3) les variations de la tension u aux bornes du résistor (D) et la tension u_b aux bornes de la bobine dans l'intervalle de temps $[0; 10ms]$.

4.1- Etablir $u_b(t)$, tension aux bornes de la bobine en régime permanent en fonction de E, r et R.

4.2- Les deux courbes $u(t)$ et $u_b(t)$ se croisent à une date t_1.

Montrer que: $L = \frac{R+r}{Ln\left(\frac{2R}{R-r}\right)}.t_1$

Retrouver la valeur de L calculée à la question (3.2).

Scanned with CamScanner

Solution

1- A l'instant ($t = 0$) ou on ferme le circuit l'intensite du courant est encore nulle, la tension u_b l'est également, ainsi la courbe (2) convient à u et (1) à la tension $u_b = E$

2- On a d'apres la loi d'additivite des tensions

$u + u_b = E$, or $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$ et $i = \frac{1}{R}u$

Donc $u + r\left(\frac{1}{R}u\right) + L\frac{1}{R}\frac{du}{dt} = E$

Ce qui vient: $\left(1 + \frac{r}{R}\right)u + \frac{L}{R}\frac{du}{dt} = E$

Soit: $u + \frac{L}{R+r}\frac{du}{dt} = \frac{R}{R+r}E$ (1)

3- La solution $u(t)$ permet de deduire que $\frac{du}{dt} = \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

En remplaçant dans (1):

$A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{L}{R+r}\left(\frac{A}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R}{R+r}E$

$Ae^{-\frac{t}{\tau}}\left[\frac{L}{R+r}\frac{1}{\tau} - 1\right] = \frac{R}{R+r}E - A$

Cette egalité n'est vérifiee que si:

$A = \frac{R}{R+r}E$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

3.1- En régime permanent: $t \to \infty$, donc u tend vers une limite $u_\infty = A(1 - e^{-\infty}) = A$

La courbe (2) donne $A = u_\infty = 1,8V$

Le tracé de la tangente à $u(t)$ à la date $t = 0$ donne $\tau = 5div = 2ms$

3.2-

$L = \tau(R + r)$

$= 2\,10^{-3}(200 + 22,2) = 0,44H$

4- A la date où les deux courbes se croisent on a $u_b = u$

Or $u_b + u = E$, ce qui donne $2u = E$

En revenant à l'expression de $u(t)$ on écrit:

$u = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{1}{2}E$

Soit $\frac{R}{R+r}E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{1}{2}E$

$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R+r}{2R}$

$\Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{R+r}{2R} = \frac{R-r}{2R}$

ou bien $e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{2R}{R-r}$

D'où

$t = t_J = \tau Ln\frac{2R}{R-r} = \frac{L}{R+r}Ln\frac{2R}{R-r}$

D'où $L = \frac{R+r}{Ln\frac{2R}{R-r}}.t_J$

l'abscisse du point J donne $t_J = 1,6ms$

$L = \frac{200 + 22,2}{Ln\frac{400}{177,8}}1,6310^{-3} \simeq 0,44H$

20 On considère le circuit suivant figure (1)

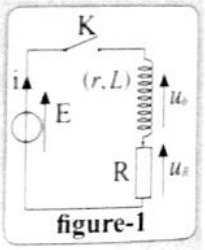


figure-1

Données: $E = 10V$; $R = 40\Omega$

L'intensité du courant dans ce circuit s'exprime par la **relation suivante:** $i(t) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, avec $\tau = \frac{L}{R+r}$

Sur la figure (2) on a représente les deux tensions u_b et u_R.

1- Exprimer la tension u_b aux bornes de la bobine en fonction du **temps.**

2- Laquelle des deux courbes représente les variations de la tension $u_b(t)$?

3- Déterminer la valeur de r.

4- Sachant que la droite (Δ) représente la tangente à la courbe (a) à la date $t = 0$. **Déterminer** L.

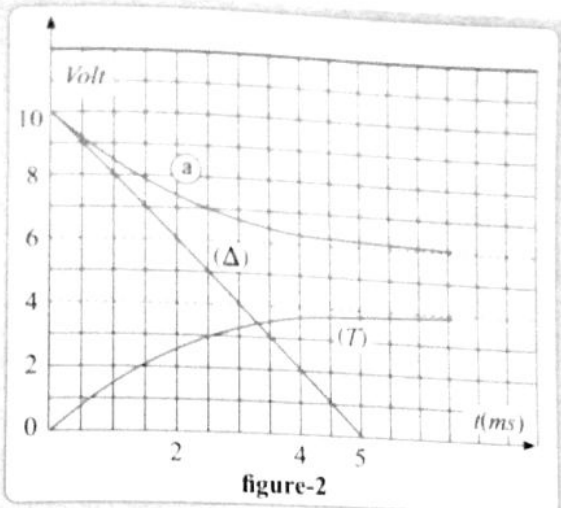


figure-2

Solution

1-

$u_b = ri + L.\frac{di}{dt}$

$= r.\frac{E}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + .\frac{L.E}{R.r}.\frac{1}{\tau}.r\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_b = \frac{rE}{R+r} + E\left(1 - \frac{r}{R+r}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u_b = \frac{rE}{R+r} + \frac{RE}{R+r}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$= \frac{E}{R+r}(r + Re^{-\frac{t}{\tau}})$

2- À la date $t = 0$,

$u_b(0) = E \neq 0 \rightarrow Courbe(a)$

3- En régime permanent:

$t \to \infty \Rightarrow u_b(\infty) = \frac{rE}{R+r}$

D'où: $rE = (R + r)u_b(\infty)$

on bien: $r(E - u_b(\infty)) = R.u_b(\infty)$

$r = R.\frac{u_b(\infty)}{E - u_b(\infty)} = 40.\frac{6}{10^{-6}} = 60\Omega$

4- $L = \tau(R + r) = 2.10^{-3}100 = 0,2H$.

21 Le montage de la figure (1) comprend:

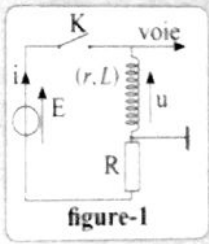


figure-1

- **Une bobine** de résistance r et d'inductance L.
- **Un résistor** de résistance R réglable.
- **Un générateur** dont la tension est constante $E = 5V$.
- **Un interrupteur** K.
- **On ferme** le circuit à la date $t = 0$ et on visualise l'évolution de la tension u au bornes de la bobine au cours du temps. La courbe obtenue est représentée sur la figure -2. La droite $(T)_0$ est celle de la tangente à la courbe de $u(t)$ à la date $t = 0$.

1- Justifier qu'à la date $t = 0$, la tension u est égale à E.

2- Montrer que u vérifie l'équation différentielle suivante:

Scanned with CamScanner

$u + \frac{R}{R+r}\frac{du}{dt} = \frac{r}{R+r}E$

3- Sachant que la solution de cette équation est de la forme: $u = Ae^{\frac{t}{\tau}} + B$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.

Montrer que:

$u = \frac{E}{R+r}[\mathrm{Re}^{-\frac{t}{\tau}} + r]$

4- Déterminer r et L

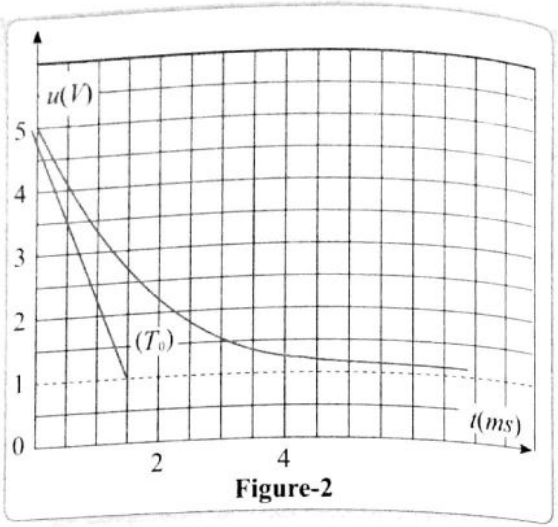


Figure-2

Solution

1- Appliquons la loi d'additivité des tensions à la date $t = 0$:

$u + u_R = E$ ou encore $u + Ri = E$ (1)

Puisque le circuit est fermé à la date $t = 0$ on a $i(0) = 0$

Donc: $u(0) = E$

2- **Exprimons** u: $u = ri + L\frac{di}{dt}$ **(2)**

or la relation (1) donne

$i = \frac{E-u}{R} = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}u$

En dérivant cette dernière expression on obtient: $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{du}{dt}$

Et en remplaçant dans (2) on obtient:

$u = r\left(\frac{E-u}{R}\right) + L\left(-\frac{1}{R}\right)\frac{du}{dt}$

c'est-à-dire: $u = \frac{rE}{R} - \frac{r}{R}u - \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$

soit: $u\left(1 + \frac{r}{R}\right) + \frac{L}{R}\frac{du}{dt} = \frac{r}{R}E$

On encore: $u(R+r) + L\frac{du}{dt} = rE$

D'où: $u + \frac{L}{R+r}\frac{du}{dt} = \frac{r}{R+r}E$

3- La solution $u = Ae^{\frac{t}{\tau}} + B$ nous donne à $(t \to \infty)$ c'est-à-dire qu'en régime permanent:

$u(\infty) = B$

Et l'équation différentielle donne, avec $\frac{du}{dt} = 0$

$u(\infty) = \frac{r}{R+r}E$

D'où: $B = \frac{r}{R+r}E$

La constante A peut être obtenue en exploitant les conditions initiales.

En effet: $u(0) = E = A + B$

D'où:

$A = E - B = E - \frac{r}{R+r}E = \frac{R}{R+r}E$

Donc: $u = \frac{R}{R+r}Ee^{\frac{t}{\tau}} + \frac{r}{R+r}E$

On bien: $u = \frac{E}{R+r}(\mathrm{Re}^{-\frac{t}{\tau}} + r)$

4- En régime permanent on a:

$U_P = u(\infty) = \frac{E}{R+r}r$

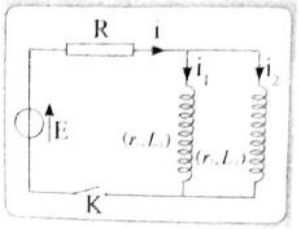
Donc $(R+r)U_P = rE$ ou encore.

Ce qui donne:

$r = \frac{U_P}{E-U_P}R = \frac{1}{5-1}.10 = 25\Omega$

$L = \tau(R+r) = 1,75.10^{-3}(125) \simeq 0,22H$

22 On réalise le circuit représenté sur la figure ci-après où les deux bobines (B_1) et (B_2) sont montées en dérivation.



On ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$.

1- On considère que les leur bobines (B_1) et (B_2) sont identiques et on pose $r_1 = r_2 = r$, $L_1 = L_2 = L$

1.1- Exprimer la tension u aux bornes de la bobine (B_1) en fonction de r_1 , L_1 et i_1.

Et, exprimer la même tension u aux bornes de (B_2) en fonction de r_2 L_2 et i_2.

1.2- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant principal transversant le conducteur ohmique s'écrit: $\tau\frac{di}{dt} + i = \frac{2E}{2R+r}$; en donnant τ en fonction de R, r, L et E.

1.3- En déduire l'expression de Ip, intensité du courant principal, en régime permanent, en fonction de E, r et R.

1.4- La solution de cette équation différentielle a pour solution: $i(t) = A + Be^{\frac{t}{\tau}}$

Trouver l'expression des constantes A et B en fonction des données.

1.5- Représenter qualitativement la courbe de $i = f(t)$ en indiquant τ et Ip.

2- En réalité, les deux bobines ne sont pas identiques et l'on a $(r_1 \neq r_2 \text{ et } L_1 \neq L_2)$.

$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} = \alpha$

On pose: $\beta = \frac{r_1.r_2}{r_1 + r_2}$

Etablir que: $\alpha\frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R}{\beta}\right)i = \frac{E}{\beta}$

Solution

1.1- $u = r_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt}$ et $u = r_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt}$

1.2- En appliquant la loi des noeuds on écrit: $i = i_1 + i_2$

Les deux bobines sont identiques: $i_1 = i_2$

alors: $i = 2i_1$; donc: $i_1 = i_2 = \frac{i}{2}$

La loi d'activité des tensions s'écrit:

$u + u_R = E$

$ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + Ri = E$

$r\frac{i}{2} + L.\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{2}\right) + Ri = E$

$ri + L\frac{di}{dt} + 2Ri = 2E$

$(r+2R)i + L\frac{di}{dt} = 2E$

$\frac{L}{2R+r}\frac{di}{dt} + i = \frac{2E}{2R+r}$

ou bien: $\tau.\frac{di}{dt} + i = \frac{2E}{2R+r}$

avec: $\tau = \frac{L}{2R+r}$

1.3- L'équation différentielle, lorsque le régime est établi s'écrit:

s'écrit: $\tau.\frac{dIp}{dt} + Ip = \frac{E}{2R+r}$, $Ip = cte$

d'où $Ip = \frac{E}{2R+r}$

1.4- En remplaçant i et $\frac{di}{dt}$ dans l'équation différentielle, on obtient.

$\tau.\left(-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + A + Be^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{2E}{2R+r}$

$B.e^{-\frac{t}{\tau}}[-1+1] = \frac{2E}{2R+r} - A$

On déduit alors que: $A = \frac{2E}{2R+r}$

La condition initiale $i(0) = 0$ permet de

Scanned with CamScanner

dure A.

$i(0) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}} = 0$

$A + B = 0$, donc $A = -B = -\frac{2E}{2R + r}$

et $i = i(t) = \frac{2E}{2R + r}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$

2. $u = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$

$u + Ri = E$, avec $i = i_1 + i_2$

Le système:

$$\begin{cases} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + Ri = E \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + Ri = E \end{cases}$$

Peut s'écrire:

$$\begin{cases} i_1 + \frac{L_1}{r_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{R}{r_1} i = \frac{E}{r_1} & (1) \\ i_2 + \frac{L_2}{r_2}\frac{di_2}{dt} + \frac{R}{r_2} i = \frac{E}{r_2} & (2) \end{cases}$$

Effectuons la somme de (1) et (2):

$i_1 + i_2 + \frac{L_1}{r_1}\frac{di}{dt} + \frac{L_2}{r}\frac{di_2}{dt} + \left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2}\right) i = E\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

C'est-à-dire:

$i + \alpha\frac{di_1}{dt} + \alpha\frac{di_2}{dt} + R\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) i = E\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

$i + \alpha\frac{di}{dt} + R\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} i = E\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}$

$i + \alpha\frac{di}{dt} + \frac{R}{\beta} i = \frac{E}{\beta}$

Soit: $\left(1 + \frac{R}{\beta}\right) i + \alpha\frac{di}{dt} = \frac{E}{\beta}$

ou bien: $\alpha\frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R}{\beta}\right) i = \frac{E}{\beta}$

23 **Le circuit de la figure (1) comprend:**

- Un générateur électrique de tension constante E.
- Une bobine (b) de résistance r et d'inductance L.
- Une bobine (b') ayant la même résistance r et de coefficient d'inductance $L' = 80mH$.
- Un conducteur ohmique de résistance $R = 200\Omega$;
- un interrupteur K.

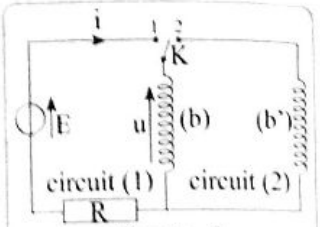


Figure - 1

1- Etablissement de courant dans le circuit (1).

À l'instant $t = 0$, on ferme le circuit (1) en basculant K à la position (1), l'intensité du courant qui passe dans ce circuit est note i.

1.1- Montrer que la tension u aux bornes de la bobine (b) vérifie l'équation différentielle suivante:

$u + \tau_1\frac{du}{dt} + = \frac{r}{R + r}E$; τ_1 est une constante à exprimer en fonctions des données utilise.

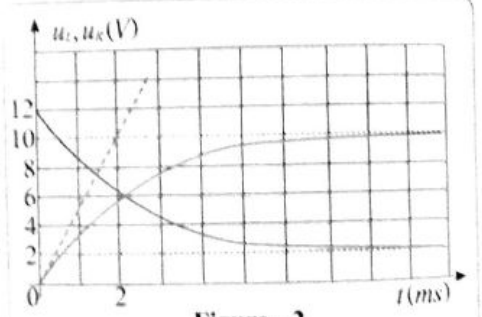


Figure - 2

1.2- Sachant que cette équation différentielle admet comme solution:

$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + B$;

montrer que: $u(t) = \frac{E}{R + r}\left[r + \mathrm{Re}^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]$.

1.3- La figure (2) représente les variations des tensions $u(t)$ et $u_R(t)$ en fonction du temps.

1.3.1- Déterminer en utilisant cette figure la valeur de E et celle de I, intensité du courant en régime permanent.

1.3.2- Déterminer la valeur de r et celle de L_1.

2- Rupture de courant dans le circuit (2).

À un instant pris comme nouvelle origine des dates $(t = 0)$, on bascule l'interrupteur K à la position (2).

2.1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i dans le circuit (2).

2.2- Donner l'expression de τ_2, constante de temps de ce deuxième circuit.

2.3- Quelle valeur doit prendre la résistance r pour avoir $\tau_2 = \tau_1$?

Solution

1.1- La tension u aux bornes de la bobine (b) a pour expression $u = ri + L\frac{di}{dt}$ (1).

La loi d'additivité des tensions, appliquée au circuit (1) s'écrit: $u + u_R = E$, avec $u_R = Ri$.

D'où: $u = E - Ri$, alors: $i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R}$.

En dérivant cette expression on obtient: $\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{du}{dt}$.

La relation (1) devient en remplaçant; et $\frac{di}{dt}$:

$u = r\left(\frac{E}{R} - \frac{u}{R}\right) + -\frac{L}{R}\frac{du}{dt}$;

ou encore: $\left(1 + \frac{r}{R}\right)u + \frac{L}{R}\frac{du}{dt} = \frac{rE}{R}$;

soit: $(R + r)u + L\frac{du}{dt} = rE$;

d'où: $u + \frac{L}{R + r}\frac{du}{dt} = \frac{r}{R + r}E$;

ou encore: $u + \frac{1}{\tau_1}\frac{du}{dt} = \frac{r}{R + r}E$;

avec: $\tau_1 = \frac{L}{R + r}$.

1.2- En tenant compte de la solution proposée, l'équation différentielle devient:

$Ae^{-\frac{1}{\tau_1}t} + B + \tau_1\left(-\frac{A}{\tau_1}e^{-\frac{1}{\tau_1}t}\right) = \frac{r}{R + r}.E$

$A.e^{-\frac{t}{\tau_1}}[1 - 1] = \frac{r}{R + r}E - B$

d'où: $B = \frac{rE}{R + r}$.

À l'instant $t = 0$, $u(0) = A + B$;

or, $u(0) = E - u_R(0) = E - R.i(0) = E$;

Scanned with CamScanner

d'où: $A = E - B = E - \frac{rE}{R+r} = \frac{R}{R+r}E$;

alors:

$u(t) = \frac{R}{R+r}E.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}$

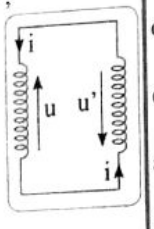
$u(t) = \frac{E}{R+r}(r + Re^{-\frac{t}{\tau}})$

1.3.1- On a $i(0) = 0$, donc $u_R(0) = 0$;

c'est donc la courbe (a) qui représente $u_R(t)$ et (b) représente u.

On a: $u(0) = E - u_R(0) = E$;

d'où: $E = 12V$.



En régime permanent, la loi d'Ohm donne:

$I = \frac{u_R(\infty)}{R}$.

$I = \frac{10}{200} = 5.10^{-2}A$.

1.3.2- En régime permanent: $u(\infty) = r.I$,

d'où:

$u(\infty) + u_R(\infty) = E$.

$(r+R)I = E$;

$r = \frac{E}{I} - R = \frac{12}{5.10^{-2}} - 200 = 40\Omega$.

On encore: $r = \frac{u(\infty)}{I} = \frac{2}{5.10^{-2}} = 40\Omega$.

La constante de temps du circuit (1) est: $\tau_1 = \frac{L}{R+r}$, d'où: $L = (R+r)\tau_1$.

Avec $\tau_1 = 2ms$, on trouve: $L = 0,48H$.

2.1- La convention utilisée pour le circuit (2) permet d'écrire:

$u + u' = 0$;

soit:

$(r+r')i + (L+L')\frac{di}{dt} = 0$;

ou bien: $\frac{L+L'}{2r}\frac{di}{dt} + i = 0$;

c'est-à-dire: $\tau_2\frac{di}{dt} + i = 0$;

avec: $\tau_2 = \frac{L+L'}{2r}$.

2.2- La condition $\tau_2 = \tau_1$ donne:

$\frac{L+L'}{2r} = \frac{L}{R+r}$.

$(L+L')r + (L+L')R = 2Lr$.

$(L-L')r + (L+L')R$.

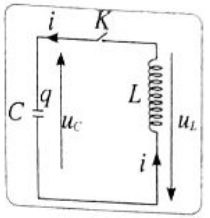
$r = \frac{L+L'}{L'-L}.R$.

$r = \frac{0,48+0,08}{0,48-0,08}.200 = 280\Omega$.

8 OSCILLATIONS ELECTRIQUES LIBRES DANS UN CIRCUIT (RLC) SERIE

I- CIRCUIT (LC) :

1 Equation différentielle vérifiée par u_C :



Considérons le circuit ci-contre où:

- La résistance de la bobine est négligeable.
- Le condensateur est initialement chargé au préalable sous une tension constante E.

Orientons ce circuit en convention récepteur.

La loi d'additivité des tensions nous permet d'écrire: $u_C + u_b = 0$

$u_C + L\frac{di}{dt} = 0$, or $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

alors: $u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$ ou bien $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

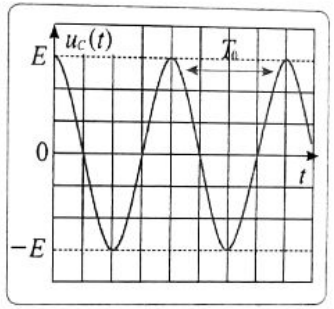
(1) (2)

2 Expression de $u_C(t)$:

La solution de cette équation différentielle du 2ème ordre est une fonction sinusoïdale, qu'on exprime par: $u_C(t) = u_{C_{max}}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

φ: angle (en radians), appelé origine des phases.

La valeur de l'origine des phases φ dépend des conditions initiales de u_C



$$\cos\varphi = \frac{u_C(0)}{u_{Cm}}$$

Par convention $-\pi < \varphi \leq \pi$

Dans la plupart des cas, on a $u_C(0) = E = u_{C_{max}}$

Dans ces cas: $u_C(t) = u_C(0).\cos\frac{2\pi}{T_0}t$

3 Période propre des oscillations:

$u_C(t) = E.\cos\frac{2\pi}{T_0}(t+\varphi)$

$\frac{du_C}{dt} = -E.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{4\pi}{T_0}\right)^2.E.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$

$= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C$

Soit: $\frac{d^2u_C}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_C = 0$ (2)

Scanned with CamScanner

En comparant cette expression avec l'équation différentielle (2) on déduit que:

$\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

alors:

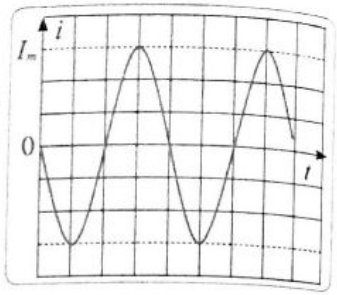
$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \rightarrow (F)$$

(s) (H)

4 Intensité du courant dans le circuit:

$i = C.\frac{du}{dt} = -C.E.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

Le courant qui passe dans le circuit (LC) est un courant alternatif sinusoïdal de période T_0 et valeur maximale I_m:



$(t) = -I_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = I_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$I_m = \frac{2\pi CE}{T_0} = \frac{2\pi CE}{2\pi\sqrt{LC}} = E\sqrt{\frac{C}{L}}$

Dans le cas où $\varphi = 0$ ou oura: $i(t) = -I_m\sin\frac{2\pi}{T_0}t$ (figure)

II- Etude énergétique du circuit idéal (LC):

1 Equation différentielle $i(t)$:

A une date, l'énergie électrique emmagasinée par le circuit est:

$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$ (1)

En l'absence de résistance il n'y a pas d'effet joule, alors l'énergie se conserve:

$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = 0$

En dérivant (1), on écrit: $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}.Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2\right]$

$C.u_C.\frac{du_C}{dt} + L.i.\frac{di}{dt} = 0 \ (\forall t)$, notons que $C\frac{du_C}{dt} = i$

$i\left[u_C + L.\frac{di}{dt}\right] = 0 \ (\forall t)$

l'intensité i n'est pas nulle $\forall t$.

$$u_C + LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

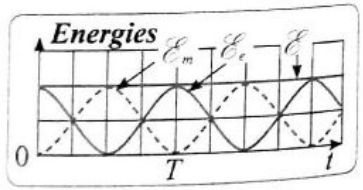
2 Expressions des $\mathscr{E}_e(t)$ et $\mathscr{E}_m(t)$:

si $u_C = E.\cos\frac{2\pi}{T_0}t$; $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}C.E^2.\cos^2\frac{2\pi}{T_0}t = \mathscr{E}_{e_{max}}.\cos^2\frac{2\pi}{T_0}t$.

$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LI_m^2.\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

Or: $I_m = E\sqrt{\frac{C}{L}}$, alors $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}CE^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

2 Diagrammes des énergies en fonction du temps:

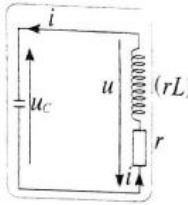


Période de variations des deux énergises: $T = \frac{T_0}{2}$

t	0	$\frac{T_0}{2}$	T_0
u_C	E	$-E$	E
$\mathscr{E}$	$\frac{1}{2}CE^2$	$\frac{1}{2}CE^2$	$\frac{1}{2}CE^2$

III- Oscillations libres dans un circuit RLC:

1 Equation différentielle de u_C:



$u_C + u = 0$

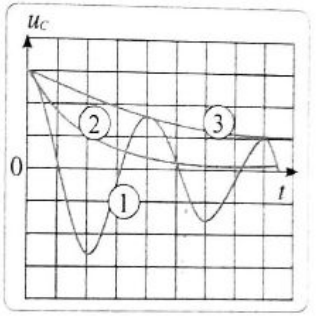
$u_C + ri + L\frac{di}{dt} + r'i = 0$, Ou pose $R = r + r'$

$$u_C + RC.\frac{du_C}{dt} + LC.\frac{d^2u_C}{dt} = 0$$

ou bien:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$$

2 Régimes des oscillations:



La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur donnée à la résistance R du circuit. Trois cas se distinguent:

- Régime pseudo-périodique correspondant aux faibles valeurs de R.
- Régime apériodique (courbe 3).
- En élevant progressivement la valeur de R, les oscillations passent du régime pseudo-périodiques au régime apériodique. Ces deux régimes sont séparés par un régime intermédiaire, appelé régime critique, obtenu pour une valeur particulière R_C appelée résistance critique.

La valeur de R_C dépend de celles de L et C du circuit (on montre que $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

3 Aspect énergétique:

L'énergie du circuit est dissipée partiellement, par effet joule dans le conducteur ohmique.

En effet, le circuit emmagasine à la date; l'énergie:

$\mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$

En dérivant par rapport au temps:

Scanned with CamScanner

$$\frac{dE_e}{dt} = \frac{1}{2}C.2u_c\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{2}L.2i\frac{di}{dt}$$

$$= u_c.C\frac{du_c}{dt} + Li\frac{di}{dt}$$

$$= u_c.i + Li.C\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$= i\left[u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}\right]$$

En revenant à l'equation différentielle précédente :

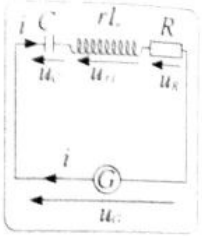
$$u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = -Ri$$

D'où $\frac{dE_e}{dt} = -Ri^2 < 0$

4. Entretien des oscillations sinusoïdales dans le circuit réel (RLC):

Au circuit (RLC), on ajoute un circuit auxiliaire contenant essentiellement une composante électronique appelée amplificateur opérationnel muni d'une alimentatat.

Pour simplifier, ce circuit est modélisé par un générateur, G dont la tension (en convention générateur) est: $u_G = Ki$, avec K (en Ω) ajustable.



Equation différentille:

$$u_c + u_{rL} + u_R = u_G$$

$$u_c + ri + L\frac{di}{dt} + Ri = Ki$$

$$u_c + (r + R - K)i + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$u_c + (r + R - K)C\frac{du_c}{dt} + LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

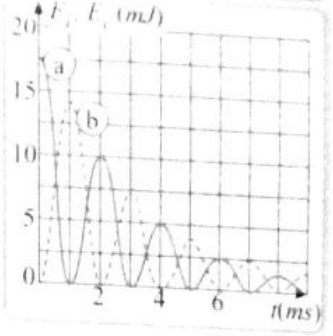
Si la valeur de K est choisie de telle façon à ce que: $K = R + r$; l'équation différentielle correspond à celles des oscillations périodiques de (LC).

Le generateur d'entretien (G) compense les pertes de l'énergie par effet joule, dans le circuit.

1 On se propose dans cet exercice l'étudier de l'influence de la résistance d'une bobine sur l'énergie totale d'un circuit RLC.

On réalise à cet effet, le montage de la figure (1) ou le condensateur est chargé, puis on ferme le circuit à la date $t = 0$.

Un appareillage convenable a permis d'obtenir le diagramme des énergies de ce circuit en fonction du temps (fig 2).



1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur.

2- Choisir en justifiant, parmi les deux courbes (a) et (b) celle qui représente l'énergie magnétique E_m stockée par la bobine.

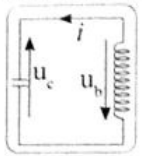
3- Exprimer l'énergie totale E_T stockée dans le circuit à la date t en fonction de C, L, q et $\frac{dq}{dt}$.

4- Montrer que $\frac{dE_T}{dt} < 0$

5- Déterminer l'énergie perdue dans le circuit entre les dates $t_1 = 2ms$ et $t_2 = 3ms$.

Solution

1- Loi d'additivité des tensions:



$$u_C + u_L = 0$$

$$\frac{q}{C} + ri + L.\frac{di}{dt} = 0 \ , \ i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + r\frac{dq}{dt} + L.\frac{di}{dt} = 0$$

$$\rightarrow q + rC.\frac{dq}{dt} + LC.\frac{dq^2}{dt^2} = 0$$

2- À la date $t = 0$ on a $i = 0$, l'énergie stockée par la bobine est donc nulle, il lui correspond alors la figure (b).

3-

$$E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$= \frac{1}{2}C.\left(\frac{q}{C}\right)^2 + \frac{1}{2}L.\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2C}.q^2 + \frac{1}{2}L.\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

4-

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2C}.2q.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}L.2.\frac{dq}{dt}.\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{C}.q.i + L.i.\frac{d^2q}{dt^2} = i\left[\frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2}\right]$$

En revenant à la question (1) on remarque

$$\frac{q}{C} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = -r\frac{dq}{dt} = -ri$$

D'où $\frac{dE_T}{dt} = i(-ri) = -ri^2 < 0$

5- Energie totale du circuit à la date t_1 :

$E_T(1) = E_e(1) + E_m(1) = 0 + 0 = 10mJ$

Et à la date t_2, cette énergie devient

$E_T(2) = E_e(2) + E_m(2) = 0 + 7,5 = 7,5mJ$

E_{perdue}: $|\Delta E| = 2,5mJ$

Scanned with CamScanner

2) **On étudie un oscillateur** électrique idéal représenté ci-contre. Il est constitué par un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L. La résistance du circuit est négligeable.

On charge le condensateur sous une tension $u_0 = E$.

Puis, à la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

figure 1

1- Établir l'équation différentielle vérifiée par u_c, tension aux bornes du condensateur.

2- La courbe donnant $u_c = f(t)$ est représentée sur la figure (2).

Son équation est du type :

$u_c(t) = U_{cm}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$

2.1- Comment nomme-t-on les grandeurs T_0, U_{cm} et φ ?

2.2- À partir de la courbe, déterminer, en le justifiant, les valeurs de T_0 et φ. Écrire $u_c = f(t)$.

figure 2

Solution

1- D'après la loi d'additivité des tensions :

$u_L + u_c = 0$

Or $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C u_c) = C\frac{du_c}{dt}$

Et $u_L = L\frac{di}{dt}$, alors $u_L = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$

(1) s'écrit : $u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2.1- U_{cm} est l'amplitude des oscillations, elle représente la valeur maximale de la tension u_c.

T_0 est la période propre du circuit.

φ est la phase à l'origine.

2.2- **On lit sur la courbe (2) :**

$T_0 = 4 \times 1,5ms = 6ms = 6.10^{-3}$ s

$U_{cm} = 4 \times 2 = 8V$

- À $t = 0$, on a :

$u_c(0) = U_{cm} = U_{cm}\cos\varphi \Rightarrow \varphi = 0$

Donc $u_c(t) = 8\cos\frac{\pi}{3}10^3 t$

3) **On se propose dans cet exercice d'étudier l'évolution de l'énergie électrique dans un circuit siège d'oscillations électriques libres.**

On réalise pour effectuer cette étude le montage de la figure (1).

Ce circuit contient les éléments suivants :

- Un générateur idéal de tension constante E.
- Un condensateur de capacité $C = 22\mu F$.
- Un conducteur ohmique de résistance R.
- Un interrupteur K.

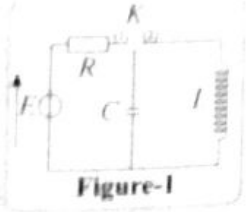


Figure-1

1- Charge du condensateur :

On bascule l'interrupteur à la position (1).

1.1- Calculer la charge Q_m du condensateur.

1.2- Calculer l'énergie électrique maximale E_{em} qu'il emmagasine.

2- Décharge du condensateur à travers une bobine ($L, r = 0$) :

On bascule l'interrupteur à la position (2) et on suit l'évolution de la tension u_c au cours du temps à l'aide d'un oscilloscope figure (2).

figure-2

2.1- Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge q.

2.2- La solution de cette équation différentielle est :

$q(t) = Q_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

a- Trouver l'expression de T_0.

b- Comment s'appelle T_0 ? cette nomination est-elle convenable à votre avis ?

c- Déterminer la valeur de L.

2.3- Montrer que l'intensité du courant i à la date t, s'écrit sous la forme :

$i(t) = I_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi'\right)$

a- Exprimer I_m en fonction de C, E et L. Calculer I_m.

b- Calculer φ'.

2.4- Les figures (3) et (4) proposent deux diagrammes d'énergies des oscillations électriques libres.

a- Laquelle de ces deux figures correspond au circuit étudié dans ce exercice ? (justifier)

b- Qu'est-ce qu'on doit ajouter à ce circuit pour que son diagramme d'énergie corresponde à la figure que vous n'avez pas choisie ?

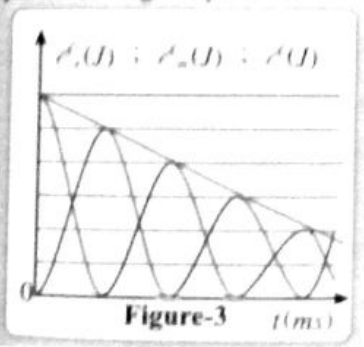


Figure-3

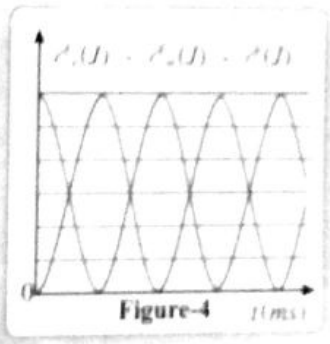


Figure-4

Scanned with CamScanner

Solution

1.1-
$Q_{max} = C.U_{max} = 22.10^{-6} \times 6 = 1,32.10^{-4}C$

1.2-
$\mathscr{E}_{max} = \frac{1}{2} C.U_{max}^2$

$\mathscr{E}_{max} = \frac{1}{2} \times 22.10^{-6} \times 36 = 3,96.10^{-4}J$

2.1- La loi d'additivité des tensions s'écrit pour ce circuit orienté en convention récepteur $u_L + u_C = 0$

On a, $u_C = \frac{q}{C}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$ avec $i = \frac{dq}{dt}$

ce qui donne $u_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$

Donc

$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow q + LC\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

Ou bien, $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ (1)

2.2.a- La solution $q(t)$ nous permet d'écrire en dérivant:

$\frac{dq}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} Q_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

Ensuite,

$\frac{d^2q}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 Q_{max} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} + \varphi\right)$

$\frac{d^2q}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q(t)$

Ou bien; $\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q = 0$ (2)

Les équations (2) et (1) sont analogues, ceci permet de déduire que:

$\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

D'où: $T_0^2 = (2\pi)^2 LC$

Alors: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

2.2.b- T_0 est appelée périodique propre des oscillations électriques dans le dipôle LC. Oui; car elle dépend des constantes de circuit qui sont L et C

2.2.c- On tire L en utilisant l'expression de T_0

$L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = \frac{(4,2,5.10^{-3})^2}{4\pi^2 \cdot 22.10^{-6}} = 0,115H$

2.3- $i = \frac{dq}{dt} = Q_{max}\left(-\frac{2\pi}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$= \frac{2\pi Q_{max}}{2\pi\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$= -\frac{CE}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$= -E\sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$= E\sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$I_m = E\sqrt{\frac{C}{L}} = 6\sqrt{\frac{22.10^{-6}}{0,115}} \simeq 83mA$

On a : $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$

La valeur de φ peut être déterminée en exploitant la figure (2) où $q(t=0) = Q_{max}$

cas $\varphi = \frac{q(0)}{Q_{max}} = \frac{Q_{max}}{Q_{max}} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

Alors: $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ *rad*

2.4.a- Puisque la résistance de la bobine est nulle, il n'y a pas perte d'énergie par effet Joule, l'énergie $\mathscr{E}$ du circuit est conservée.

La figure qui correspond à ce circuit est (4)

2.4.b- Pour obtenir le diagramme d'énergies de la figure (3) il faut ajouter à ce circuit un conducteur ohmique.

4 On considère le circuit ci-contre.

1- En utilisant la convention du sens du courant indiqué sur ce circuit, montrer que $u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2- La solution de cette équation différentielle est $u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$

Sachant que le circuit est fermé à la date $t = 0$, date à laquelle on a $u_c(0) = E > 0$

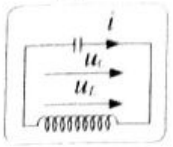
Montrer que $\varphi = 0$, en déduire que $U_m = E$

Solution

1- Si on oriente la tension u_c en convention récepteur: $u_L = L\frac{di}{dt}$

$i = \frac{d(-q)}{dt} = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du_c}{dt}$

Donc: $u_L = -LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$



Les deux tensions sont telles que : $u_C = u_L$;

soit: $u_c = -LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$

d'où: $u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$

2- Conditions initiales: $u_C(0) = E > 0$ et $i(0) = 0$

- L'expression de $u_c(t)$ donne

$u_c(0) = U_m \cos\varphi$ (1);

- exprimons $i(0)$:

$i(t) = C\frac{du_c}{dt} = -C\frac{2\pi}{T_0}U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

d'où: $i(0) = -\frac{2\pi}{T_0}CU_m \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 0$

Puisque φ appartient à l'intervalle:

$-\pi < \varphi \leq \pi$;

an a: $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$;

Or, la relation (1) donne:

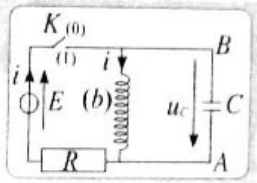
$\cos\varphi = \frac{u_c(0)}{U_m} = \frac{E}{U_m} > 0$

Donc, la valeur $\varphi = \pi$ est à rejeter

d'où : $\varphi = 0$

alors (1): $U_m = \frac{u_c(0)}{\cos\varphi} = E$

5 On considère le circuit électrique de la figure suivante où:



- La bobine (b) a une résistance négligeable et une inductance L.
- Le condensateur de capacité C est non chargé.

Données: $E = 6,0V$, $R = 50\Omega$, $C = 0,9\mu F$, $L = 0,28H$.

1- On ferme le circuit en mettant l'interrupteur (K) sur la position (1) jusqu'à ce que le régime permanent s'établisse.

1.1- Montrer que la tensione u_{AB} en régime permanent est nulle.

1.2- En déduire qu'aucun courant une traverse la branche AB

1.3- Calculer l'intensité I_0 du courant traversant la bobine en régime permanent.

Scanned with CamScanner

2- A une date $t = 0$, on ouvre le circuit en déplaçant K à la position (0).

2.1- Schématiser le circuit dans lequel passe le courant.

2.2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$.

2.3- Sachant que $u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi\right)$

2.3.1- Déterminer φ

2.3.2- Exprimer la tension U_m en fonction de E, R, L et C

Vérifier la dimension de U_m et calculer sa valeur.

Solution

1.1- Le circuit est fermé et le régime permanent est atteint,

alors: $i = cte = I_0$, donc:

$u_{AB} = u_b = L.\frac{di}{dt} = 0$

1.2- On a, $u_c = u_{AB} = u_L + 0 (\forall t)$,

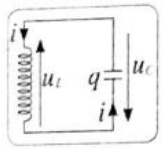
et $i_c = C.\frac{du_c}{dt} = 0$,

1.3-

$E = u_b + u_R = 0 + u_R = RI_0$

$\Rightarrow I_0 = \frac{E}{R} = \frac{6}{50} = 0,12A$

2.1- **Schéma du circuit:**



2.2- $u_L + u_c = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + u_c = 0$

$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_c}{dt} \Rightarrow LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0$

2.3.1-

A à la date $t = 0$, $u_c(0) = U_m.\cos\varphi$.

Et à cette date, on a d'après l'étape du régime permanent $u_c = 0$, donc, $\cos\varphi = 0$, ce qui donne: $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}\,rad$

Exploitons, une autre condition initiale de ce circuit qui est $i(0) = I_0$.

$i = C.\frac{du_C}{dt}$

$i = -CU_m.\frac{1}{\sqrt{LC}}.\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t + \varphi\right)$

$i(0) = I_0 = -U_m.\sqrt{\frac{C}{L}}.\sin\varphi$

I_0 étant positive, alors $\sin\varphi < 0$;

donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}\,rad$

2.3.2-

On vient de voir $i(0) = I_0 = -U_m\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\varphi$;

et en tenant compte de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

et $I = \frac{E}{R}$ on obtient:

$U_m = I_0\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{E}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Dimension de U_m: $[U_m] = \frac{[E]}{[R]}\left(\frac{[L]}{[C]}\right)^{\frac{1}{2}}$

$[U_m] = \frac{[U]}{[U][I]^{-1}}\left(\frac{[U][\Delta t].[I]^{-1}}{[I].[\Delta t].[U]^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= [I].([I]^2[U])^{\frac{1}{2}}$

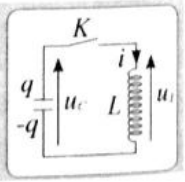
$[U_m] = [I].[I]^{-1}.[U] = [U]$

$U_m = I_0\sqrt{\frac{L}{C}}$

$U_m = 0,12\sqrt{\frac{0,28}{0,9.10^{-6}}} = 66,93V$

6 On considère le circuit oscillant LC suivant:

- Le condensateur est chargé avant la fermeture de ce circuit sous une tension constante E pendant une durée assez grande.
- La bobine a un coefficient d'induction $L = 0,1H$ et une résistance négligeable.

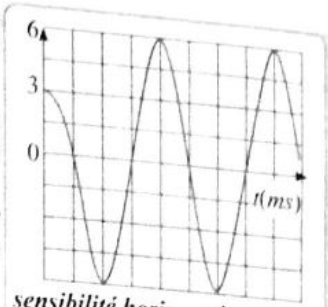


1- En tenant compte des indications de ce circuit, montrer que la tension u_c vérifie l'équation différentielle: $u_c + LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2- On ferme le circuit, mais le chronomètre n'est déclenché que lorsque le condensateur est déchargé à moitié dans la bobine.

Un dispositif expérimental a permis d'obtenir l'évolution de u_c en fonction du temps à partir de $t = 0$, date de déclenchement du chronomètre.

Sachant que l'équation différentielle admet comme solution: $u_c = E.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$



sensibilité horizontale: 1ms/div

2.1- Montrer que $\varphi = \frac{\pi}{3}\,rad$

2.2- Déterminer T_0. En déduire L (on prend $\pi^2 = 10$)

2.3- Déterminer l'intensité maximale du courant dans le circuit.

2.4- Calculer l'intensité du courant à la date $t = 17ms$.

Solution

1- Le condensateur est orienté dans ce circuit en convention générateur;

dans ce cas: $i = \frac{d(-q)}{dt} = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du_c}{dt}$;

d'où $\frac{di}{dt} = -C\frac{d^2u_c}{dt^2}$

La relation entre les deux tensions u_c et u_L est telle que:

$u_C = u_L$

or $u_L = L.\frac{di}{dt} = -LC.\frac{d^2uc}{dt^2}$

Donc: $u_C = -LC.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

D'où: $u_C + LC.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

2.1- Condidèrons l'expression de u_c à $t = 0$:

$u_c(0) = E\cos\varphi$

Graphiquement $u_c(0) = \frac{E}{2}$,

donc $\cos\varphi = \frac{1}{2}$

Deux valeurs sont donc possibles:

$\varphi = \frac{\pi}{3}\,rad$ ou $\varphi = -\frac{\pi}{3}\,rad$

En revenant à la courbe, on a:

$\left(\frac{du_c}{dt}\right) < 0$

$\frac{du_c}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}E\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

A $t = 0$: $\left(\frac{du_c}{dt}\right)_0 = -\frac{2\pi}{T_0}.E.\sin\varphi$

Puisque $\left(\frac{du_c}{dt}\right)_0 < 0$; $\sin\varphi$ est donc positif.

D'où $\varphi = \frac{\pi}{3}\,rad$.

2.2- Valeur de T_0 et celle de C:

$T_0 = 6ms$; $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$;

$C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} = \frac{36.10^{-6}}{4.10.0,1} = 9\mu F$

2.3-

On a: $i = -C.\frac{du_c}{dt}$

Avec $u_c = E.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{3}\right)$, on obtient:

$i = +CE.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{3}\right)$

$i = E\sqrt{\frac{C}{L}}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{3}\right)$

$i = I_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{3}\right)$

$I_{max} = \sqrt{\frac{C}{L}}.E = \sqrt{\frac{9,10^{-6}}{0,1}}.6 \simeq 56,9mA$

2.4- **Calcul de i à $t = 17ms$:**

$i = I_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \frac{\pi}{3}\right)$

$i = I_{max}.\sin\left(\frac{2\pi}{6}.17 + \frac{\pi}{3}\right) = I_{max}\sin 6\pi = 0$

Scanned with CamScanner

7 On réalise le montage de la figure ci-contre.

Le condensateur est déchargé. On place l'interrupteur à la position (1) pour le charger complètement sous la tension $E = 6V$.

- A une date $t = 0$, on déplace l'interrupteur à la position 2, et à l'aide d'un système d'acquisition des données on visualise sur ordinateur les variations u_c en fonction de $\frac{d^2u_c}{dt^2}$ figure (2).

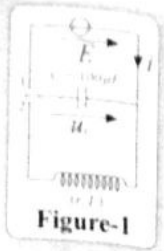


Figure-1

1- Montrer que la tension u_c vérifie l'équation différentielle:

$u_c + rC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2- Donner les noms des quatre modes possibles d'oscillations électriques au sein de ce type de circuit en classant ces régimes selon les valeurs de la résistance du circuit.

3- selon les résultats de cette expérience, le circuit étudié est le siège de quel type d'oscillations?

Que peut t-on dire de la résistance de la bobine?

4- Déterminer son coefficient d'inductance L.

5- Sachant que la solution de l'équation différentielle étudiée est:

$u_c = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

Déterminer U_m, φ et T_0. Ecrire $u_c(t)$.

6- Exprimer les energies $\mathscr{E}_e$ et $\mathscr{E}_m$ en fonction de u_c et des paramètres du circuit.

7- Pour quelle valeur de u_c, ces deux énergies s'égalisent?

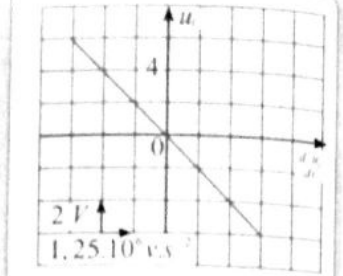


Figure-2

Solution

1- Selon la loi d'additivité des tensions:

$u_r + u_c = 0$

Avec: $u_r = ri + L\frac{di}{dt}$ et $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

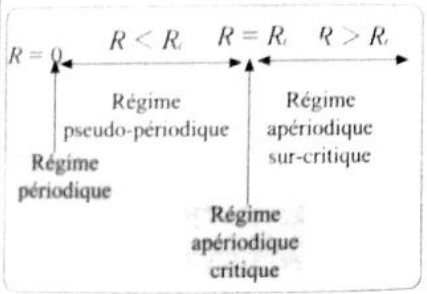
$u_r + rC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2- Si la résistance du circuit est négligeable: le circuit (LC) est le siège d'oscillations électriques libres périodiques.

- Si la résistance du circuit n'est pas négligeable, trois cas se présentent:

- Résistance faible: oscillations pseudo-périodiques.

- Résistance grande: oscillations apériodiques.



3- A partir du diagramme de la figure 2, u_c en fonction de $\frac{d^2u_c}{dt^2}$ est une droite linéaire, qu'on écrit sous la forme $u_c = -A\frac{d^2u_c}{dt^2}$

pente de cette droite.

En comprenant le résultat $u_c + A\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$, avec l'équation différentielle, on constate que le deuxième terme est nul:

$rC\frac{duC}{dt} = 0$

Or C et $\frac{du_c}{dt}$ sont non nuls;

ce qui montre que la bobine utilisée dans cette expérience est de résistance négligeable.

4- L'analogie entre les deux expressions: $u_c + A\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$ et $u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$;

donne: $A = LC$, donc:

$L = \frac{A}{C}$, $A = \frac{2}{1,25.10^{6}} = 1,6.10^{-6}s^2$

D'où $L = \frac{1,6.10^{-6}}{100.10^{-6}} = 1,6.10^{-2}H$

5- Graphiquement $U_{max} = 6V$:

La condition initiale sur u_c donne

$u_c(0) = E > 0$

Et, l'expression $u_c(t)$, donne:

$u_c(0) = U_m.\cos\varphi$

Donc $\cos\varphi = \frac{E}{u_m} > 0$ (1)

Utilisons la condition initiale $i(0) = 0$.

Exprimons $i(t) = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

$i(t) = -\frac{2\pi}{T_0}U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) + \varphi$

$\Rightarrow i(0) = 0 = -\frac{2\pi}{T}u_m \sin\varphi$

On déduit alors que $\sin\varphi = 0$.

Et par suite $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$;

$-\pi < \varphi \leq \pi$

parmi ces deux valeurs, celle qui vérifie la condition

$\cos\varphi > 0$ est $\varphi = 0$

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{1,6.10^{-2}.10^{-4}}$

$T_0 = 7,94ms$

Alors $u_c(t) = 6\cos(790,57t)$

6- $\mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu_c^2$:

$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$, $\mathscr{E}$ étant l'énergie électrique totale emmagasinée dans le circuit sa valeur reste constante dans ce circuit $(r = 0)$.

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_e(0) = \frac{1}{2}CE^2$

Alors, $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}C(E^2 - u_c^2)$

7- En posant la condition $\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_m$ on a:

$\frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}C(E^2 - u_c^2)$

Ceci donne: $2u_c^2 = E$

d'ou $u_c = \pm\frac{E}{\sqrt{2}} = \pm 4,24V$

8 La figure (1) représente la tension u_c aux bornes d'un condensateur, dans un circuit libre idéal

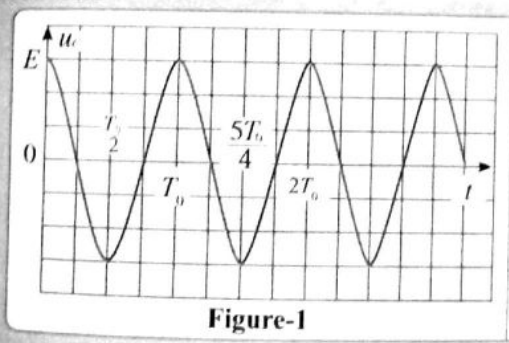


Figure-1

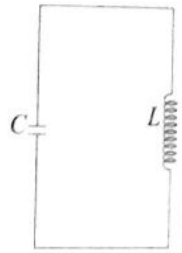


Figure-2

1- Quelle est l'expression de l'énergie $\mathscr{E}_e$ emmagasinée par le condensateur à la date $t = 0$?

Scanned with CamScanner

2- Quelle est à la date $t = 0$, la valeur de l'énergie $\mathscr{E}_m$ emmagasinée, par la bobine?

3- Quelle propriété qualifie l'énergie totale $\mathscr{E}$ emmagasinée dans ce circuit?

Exprimer $\mathscr{E}$ en fonction de C et E.

4- Remplir le tableau suivant

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3}{4}T_0$	T_0	$\frac{5T_0}{4}$	$3\frac{T_0}{2}$
u_C							
$\mathscr{E}_e$							
$\mathscr{E}_m = \mathscr{E} - \mathscr{E}_e$							

5- En déduire que la période T de $\mathscr{E}_e(t)$ et de $\mathscr{E}_m(t)$ est égale à $\frac{T_0}{2}$.

6- Exprimer l'intensité maximale I dans ce circuit en fonction de C, L et E

Calculer sa valeur lorsque:

$C = 220nF$, $L = 44mH$ et $E = 7,5V$.

Solution

1-

à $t = 0$, on a $u_C = E$, d'où $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}CE^2$

2-

$\mathscr{E}_e = 0$ car $i = 0$, on peut justifier ceci soit en disant qu'à $t = 0$, date de fermeture du circuit, l'intensité du courant est encore nulle, soit en remarquant que la tangente à la courbe à la date $t = 0$ est horizontale, et par suite $i = C.\frac{du_C}{dt} = 0$

3-

La valeur de $\mathscr{E} = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$, se conserve (circuit idéal)

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_e(0) + \mathscr{E}_m(0) = \mathscr{E}_e(0)$

$\mathscr{E} = \frac{1}{2}CE^2 = \mathscr{E}_{e\,max}$

4-

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3}{4}T_0$	T_0	$\frac{5T_0}{4}$	$3\frac{T_0}{2}$
u_C	E	0	$-E$	0	E	0	$-E$
$\mathscr{E}_e$	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$
$\mathscr{E}_m = \mathscr{E} - \mathscr{E}_e$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0

5- On remarque que la durée minimale T après laquelle $\mathscr{E}_e$ prend sa valeur maximale $\left(\frac{1}{2}CE^2\right)$ est $\frac{T_0}{2}$.

C'est-à-dire $\mathscr{E}_e(t+T) = \mathscr{E}_e(t)$,

avec $T = \frac{T_0}{2}$

Il en est de même pour $\mathscr{E}_m(t)$

6- **On a** $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$ **:**

Cette énergie est maximale lorsque i est maximale

C'est-à-dire : $\mathscr{E}_{m(max)} = \frac{1}{2}L.I_{max}^2$

Or $\mathscr{E}_{m(max)} = \mathscr{E} = \frac{1}{2}CE^2$

D'où l'égalité: $\frac{1}{2}L.I_{max}^2 = \frac{1}{2}CE^2$

donc, $I_{max} = E\sqrt{\frac{C}{L}}$

$I_{max} = 7,5\sqrt{\frac{220.10^{-9}}{44.10^{-3}}} = 16,77mA$

9 Après avoir chargé un condensateur de capacité C, sous une tension continue U, on le monte avec une bobine d'inductance L et de résistance négligeable (voir figure -1).

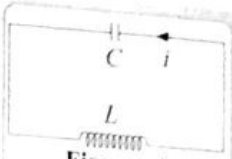


Figure - 1

1- Représenter sur cette figure, les deux tensions u_C et u_L en convention récepteur.

2- Etablir l'equation différentielle vérifiée par la tension u_C.

3- Les variations de sont représentées sur la figure 2.

En exploitant cette figure, exprimer numériquement la tension u_C en fonction du temps.

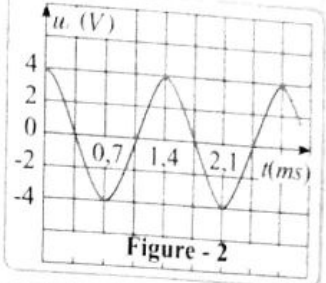


Figure - 2

4- Les variations de l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine, en fonction du temps sont representées sur la figure 3.

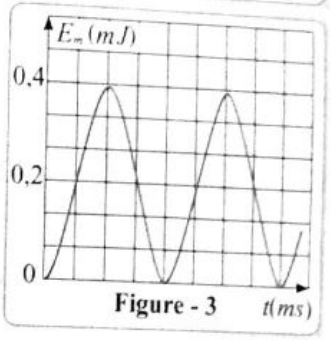


Figure - 3

4.1- Montrer que l'énergie E_m peut s'écrire:

$E_m = \frac{1}{4}C.U^2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{T_0}t\right)$

On rappelle que: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

4.2- En déduire l'expression de l'énergie magnétique maximale de la bobine E_{mmax} en fonction de C et U.

4.3- En utilisant la figure (3), déterminer C

4.4- Trouver la valeur du coefficient L

Solution

1- Schéma du circuit: sont opposées à i les tensions u_C et u_L

2- On écrit en appliquant la loi d'additivité des tensions : $u_C + u_L = 0$ (1)

La résistance de la bobine étant négligeable:

$u_L = L.\frac{di}{dt}$,

or $i = \frac{dq}{dt} = d\frac{(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

alors, $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

En remplaçant dans (1), on a:

$u_C + LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$

3- D'après la courbe de la figure (2), la fonction est sinusoïdale, on la présente sous la forme suivante

$u_C = U_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

Sur cette figure, lot $u_m = 4V$

et $T_0 = 1,4ms = 1,4.10^{-3}s$

A la date $t = 0$, on a $u_C(0) = U$

Et, d'après l'expression de la fonction $u_C(t)$, on a $u_C(0) = u_m\cos\varphi$, d'où $U_m\cos\varphi = U$ (1)

A $t = 0$, on a $\left(\frac{du_C}{dt}\right) = 0$: tangente horizontale.

Or $\left(\frac{du_C}{dt}\right) = -C.\frac{2\pi}{T_0}.\sin\varphi$, d'où:

$\sin\varphi = 0$ et les valeurs de φ sont 0 ou π

Scanned with CamScanner

La solution $\varphi = \pi$ est contradictoire avec (1), car $u_c > 0$ et $u_c > 0$

donc $\varphi = 0$ et $u_c = U$

L'expression de $u_c(t)$ est

$u_c(t) = 4\cos\frac{2\pi}{1,4.10^{-2}}t = 4\cos 4,48.10^2 t$

4.1- On sait que $E_m = \frac{1}{2}Li^2$

$i = C\frac{du_c}{dt} = C\left(-\frac{2\pi}{T_0}U\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$i^2 = C^2\frac{4\pi^2}{4\pi^2 LC}U^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

$i^2 = \frac{C}{L}U^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

alors $E_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

posons $\frac{2\pi}{T_0}t = a$,

$\begin{cases}\cos^2 + \sin^2 a = 1\\ \cos a - \sin^2 a = \cos 2a\end{cases}$

En effectuant la différence de ces deux expressions on écrit:

$\rightarrow \quad 2\sin^2 a = 1 - \cos^2$,

alors $\sin^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Donc:

$E_m = \frac{1}{2}CU^2\frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\frac{2\pi t}{T_0}\right)$

$E_m = \frac{1}{4}CU^2\left(1 - \cos\frac{4\pi t}{T_0}\right)$

4.2- Cette énergie est maximale lorsque le cosinus dans cette expression est minimal

$\cos\frac{4\pi}{T_0}t = -1$

d'où $E_{m\,max} = \frac{1}{4}CU^2(1 - (-1)) = \frac{1}{2}CU^2$

4.3- Sur la figure 3 on lit:

$E_{max} = 0,4mJ = 4.10^{-4}J$

On déduit C en écrivant:

$\frac{1}{2}CU^2 = E_{max}$, d'où $C = \frac{2E_m}{U^2}$

$C = \frac{2.4.10^{-4}}{(4)^2} = 0,5.10^{-4}F$

ou $C = 50\mu F$

4.4-

$T_0 = \sqrt{2\pi LC}$, alors:

$L = \frac{T_0^2}{2\pi C} = \frac{(1,4.10^{-2})^2}{2\pi.0,5.10^{-4}}$

$L \simeq 6,24.10^{-3}H \simeq 6,24mH$

10 Le circuit schématisé ci-contre comprend:

- Un générateur de tension continue, $E = 6V$.
- Une bobine de résistance $r = 5\Omega$ et de coefficient d'induction L réglable.
- Un conducteur de capacité C.
- Deux conducteurs ohmiques, l'un de résistance R_1 et l'autre de résistance R_2.
- Un interrupteur K.

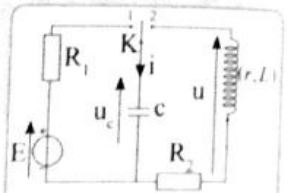


Figure-1

1- On fait basculer l'interrupteur à la position 1, à une date prise comme origine du temps ($t = 0$).

1.1- Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension u_c.

1.2- Exprimer la tension u_c lorsque le régime permanent est supposé établi.

2- On fixe R_1 sur la valeur $R_1 = 0\Omega$ et la valeur de L l'inductance sur la valeur $L = 100mH$

A une date du régime permanent, on bascule K à la position (2) cette date est prise comme une nouvelle origine du temps ($t = 0$).

On visualise la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope. La courbe obtenue est représentée sur la figure 2

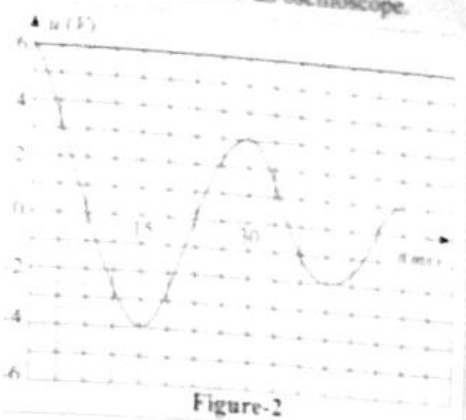


Figure-2

2.1- Schématiser le montage équivalent de ce circuit

Indiquer comment doit être branché l'oscilloscope pour obtenir la figure 2

2.2- Quel phénomène est mis en évidence dans ce circuit?

2.3- Etablir l'équation différentielle:

$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du_c}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)u_c = 0$

τ et T_0 sont des constantes à exprimer en fonction des données du circuit.

2.4- Déterminer la dimension de τ. Calculer sa valeur.

2.5- On considère que la pseudo-période des oscillations est égale à la période propre T_0.

- Déterminer la valeur de la capacité C.

2.6- La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme

$u_c(t) = A\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$

Calculer les valeurs des constantes A et φ.

Solution

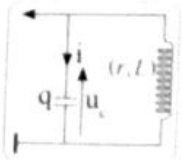
1.1- $u_c + R_1 i = E$, avec $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

alors $u_c + R_1 C\frac{du_c}{dt} = 0$ ou bien:

$R_1 C\frac{du_c}{dt} + u_c = E$.

1.2- Lorsque s'établit le régime permanent dans le circuit, $u_c = cte = E$

2.1- Schéma du circuit équivalent ($R_1 = 0$).



2.2- Régime pseudo-périodique:

$T = 30ms$

2.3- $u_c + u_r = 0 \Rightarrow u_c + ri + L\frac{di}{dt} = 0$,

$i = C\frac{du_c}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_c}{dt^2}$

D'où $u_c + rC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

ou: $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$

ou encore: $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du_c}{dt} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c = 0$

D'où: $\frac{1}{\tau} = \frac{r}{L} \Rightarrow \tau = \frac{L}{r}$

$\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

2.4- $[\tau] = \left[\frac{[L]}{[r]}\right] = \frac{[U][\Delta t][I]^{-1}}{[U][I]^{-1}} = [\Delta t]$

2.5-

$T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$\rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} = \frac{(3.10^{-2})^2}{4\pi^2.0,1} \simeq 228\mu F$

Scanned with CamScanner

2.6- On a: $u_c(t) = A.e^{-\frac{t}{2\tau}}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$

Utilisons les conditions initiales:

1ère condition: $u_c(0) = A\cos\varphi$,

graphiquement $u_c(0) = 6,0V$

2ème condition: $i(0) = 0$,

Dérivons $u_c(t)$:

$i(t) = C\frac{du_c}{dt}$

$i(t) = C.\left[\left(-\frac{A}{2\tau}\right)e^{-\frac{t}{2\tau}}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}+\varphi\right) - \frac{2\pi}{T}A.e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)\right]$

$i(0) = -CA.\left[\left(\frac{1}{2\tau}.\cos\varphi + \frac{2\pi}{T}.\sin\varphi\right)\right]$

On a: $i(0) = 0$, d'où:

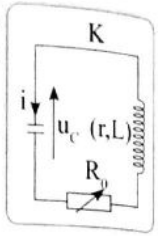
$\frac{1}{2\tau}\cos\varphi = -\frac{2\pi}{T}\sin\varphi \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{T}{4\pi\tau}$

$\tan\varphi = -\frac{3.10^{-3}}{4\pi.2.10^{-3}} = -0,119$

$\varphi = -0,118rad$

$A = \frac{u_c(0)}{\cos\varphi} = \frac{6}{\cos 0,993} = 6,04 \simeq 6,0V$

11 Un circuit RLC réel peut être le siège de plusieurs types d'oscillations électriques libres et ce selon les valeurs des paramètres R, L et C.



Pour distinguer ces modes d'oscillations, on propose le circuit ci-contre.

1- Etablir d'équation différentielle suivante:

$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2.u_c = 0$.

avec: $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{LC}$.

R étant la résistance totale du circuit $(R = R_0 + r)$.

2- Cette équation différentielle possède trois types de solution selon le signe du discriminant: $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$.

1er cas: • Si $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ la solution est du type $u_c = u_{c_m}.e^{-\lambda t}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$

Les ocillations sont pseudo-périodiques de pseudo-période T dont l'expression est:

$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - LC.\lambda^2}}$

T_0 étant la période propre du circuit (LC).

• Si $\lambda^2 - \omega_0^2 \geq 0$: le régime est dit apériodique.

La résistance du circuit vérifie dans ce cas, la condition suivante : $R \geq R_C$, R_C est appelée résistance critique du circuit.

2.1- Montrer que $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, que peut-on déduire?

2.2- Exprimer T en fonction de T_0, R et R_C.

2.3- Comment varie T lorsqu'on fait augmenter la résistance R du circuit?

2.4- Calculer le rapport $\frac{T}{T_0}$, dans les deux cas suivants: $R = \frac{1}{2}R_C$ et $R = \frac{1}{5}R_C$.

2.5- Dans la pratique T est sensiblement égale T_0 lorsque $\frac{\Delta T}{T_0} < 5\%$

Dans quelle marge doit-on choisir la valeur de R pour pouvoir prendre $T \simeq T_0$?

On donne: $R_C = 200\Omega$

Solution

1-

$u_C + u_{(r,L)} + u_{R_0} = 0$

$u_C + ri + L\frac{di}{dt} + R_0 i = 0$

avec $i = C\frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$ et $i = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$,

on obtient:

$u_C + RC\frac{du_C}{dt} + LC.\frac{d^2u_C}{dt^2}$, $R = r + R_0$

Ou bien $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

Et, en posant $\frac{R}{L} = 2\lambda$ et $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$

on obtient: $\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$

2.1- Le régime apériodique est obtenu lorsque: $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$, alors: $\lambda^2 = \omega_0^2$ ce qui donne $\lambda = \omega_0$ (car $\lambda > 0$)

C'est-à-dire: $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

En posant $R = R_C$ on a:

$R_C = 2\frac{L}{\sqrt{LC}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

On déduit que R_C dépend des valeurs de L et C caractérisant le circuit.

2.2- $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - LC.\lambda^2}}$

Le terme $LC\lambda^2$ peut s'écrire:

$LC\lambda^2 = LC.\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{R^2}{4\frac{L}{C}}$

$LC\lambda^2 = \frac{R^2}{\left(2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)} = \left(\frac{R}{R_C}\right)^2$

Donc: $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_C}\right)^2}}$

2.3- Lorsque R augmente, le terme $-\left(\frac{R}{R_C}\right)^2$ diminue, le dénominateur de l'expression diminue également, donc T augmente.

2.4- Si $R = \frac{R_C}{2}$, on a:

$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 1,15T_0$

Si $R = \frac{R_C}{5}$, on a:

$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{25}}} = 1,02T_0$

2.5-

$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T}{T_0} - 1 \leq 5\% = 0,05$

alors, $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_C}\right)^2}} < 1,05$

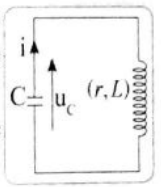
et $1 - \left(\frac{R}{R_C}\right)^2 > \frac{1}{(1,05)^2} = 0,907$

ceci donne: $\left(\frac{R}{R_C}\right)^2 < 0,093$

on trouve: $R < \sqrt{0,093}RC = 0,3R_C$

Donc: $0 \leq R \leq \frac{3}{10}R_C = 60\Omega$.

12 Un condensateur est chargé sous une tension de $6,0V$ puis connecté aux bornes d'une bobine d'inductance L inconnue, comme l'indique le schéma du circuit ci-contre.



L'évolution de la tension u_C au cours du temps est enregistrée à l'aide d'un ordinateur.

On obtient la courbe ci-après.

1- Comment appelle-t-on le type d'oscillations observées?

2- Déteminer la pseudo-période de ces oscillations, puis, en supposant que la pseudo-période est égale à la période propre du circuit et sachant que $C = 20\mu F$, déduire la valeur de L.

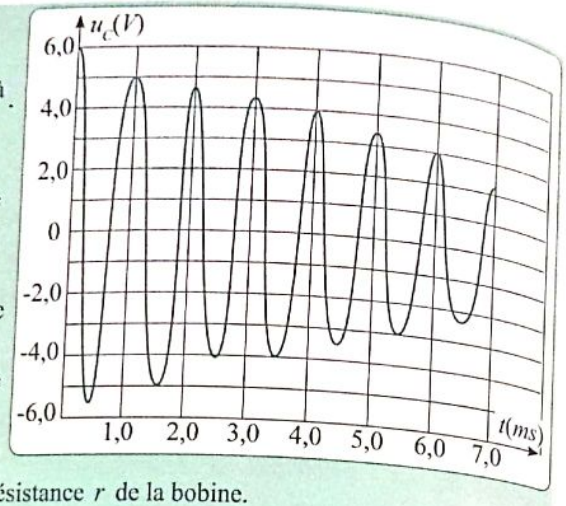
Scanned with CamScanner

3- Calculer l'énergie E_C emmagasinée dans le condensateur à $t = 0$, puis à $t = 4ms$.

4- Que vaut l'énergie E_L emmagasinée dans la bobine à ces mêmes instants? Justifier la réponse.

5- En déduire l'énergie totale du circuit E_0 à $t = 0$ et E_1 à $t_1 = 4ms$. L'énergie est-elle constante? Pourquoi?

6- En admettant que: $\frac{E_1}{E_0} = e^{-\frac{r}{L}(t_1 - t_0)}$, déterminer la résistance r de la bobine.



Solution

1- Il s'agit d'oscillations libres amorties.

2- On lit: $T = 100ms$. Or on a:

$T = 2\pi\sqrt{LC}$, d'où: $T^2 = 4\pi^2 LC$ et

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(1,0\times10^{-3})^2}{4\pi^2\times20\times10^{-6}}$$

$$L = 1,3\times10^{-3}H = 1,3mH$$

3- A $t_1 = 0ms$, $u_C = 6,0V$.

D'où:

$$E_{C_1} = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}\times20\times1^{-6}\times(6,0)^2$$

$$E_{C_1} = 3,6\times10^{-4}J$$

A $t_2 = 4,0ms$, $u_C = 4,0V$

D'où:

$$E_{C_2} = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}\times20\times10^{-6}\times(4,0)^2.$$

$$E_{C_2} = 1,6\times10^{-4}J$$

4- On sait que: $E_L = \frac{1}{2}Li^2$

et $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{dCu_C}{dt} = -C\frac{du_C}{dt}$.

Or, à t_1 et t_2, u_C est au maximum, donc: $\frac{du_C}{dt} = 0$. Alors: $i = C\frac{du_C}{dt} = 0$ donc $E_m = 0$

et $E_2 = 1,6\times10^{-4}J$

et $E_1 = E_{C_1} = 3,6.10^{-4}J$.

5- On constate que l'énergie diminue au cours du temps; ceci est dû aux pertes d'énergie par effet Joule dans les résistances du circuit.

6- On a: $\frac{E_2}{E_1} = e^{-\frac{r}{L}(t_2 - t_1)}$,

d'où: $\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = -\frac{r}{L}(t_2 - t_1)$

ou encore: $r = -\frac{L}{t_2 - t_1}\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$

$$r = \frac{-1,3\times10^{-3}}{4,0\times10^{-3} - 0}\ln\left(\frac{1,6\times10^{-4}}{3,6\times10^{-4}}\right)$$

$$r = 0,26\Omega$$

13 Un condensateur de capacité C est initialement chargé sous une tension U_0 $(U_0 > 0)$.

On branche les armatures de ce condensateur avec une bobine de coefficient d'induction L et de résistance négligeable figure (1).

Le circuit est fermé à la date $t = 0$.

1- Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

2- La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme: $u_C(t) = U_m.\cos(2\pi N_0 t)$

Exprimer N_0 et U_m en fonction des paramètres du circuit C et L et U.

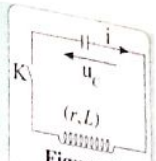


Figure-1

3- Etablir l'expression de l'intensité du courant $i(t)$.

4- Une étude énergétique de ce circuit a permis d'obtenir la figure (2-a) représentant l'énergie magnétique $\mathscr{E}_m$ emmagasinée dans la bobine en fonction de l'intensité du courant i.

La figure (2-b) représnete les variations de cette énergie en fonction du temps.

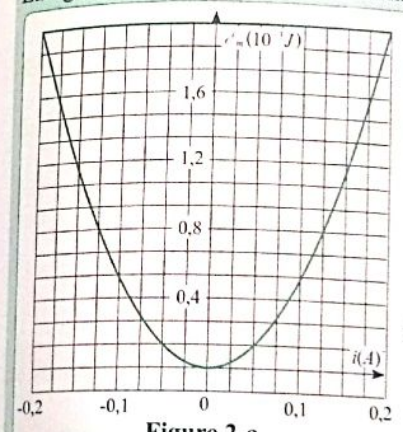


Figure 2-a

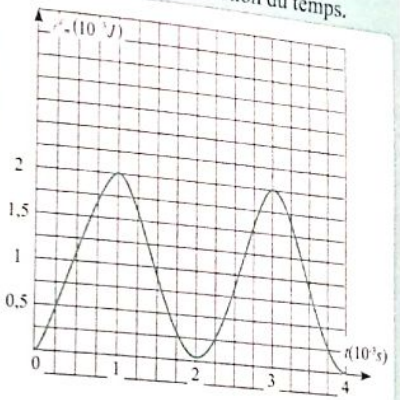


Figure 2-b

4.1- En exploitant la figure 2-a, déterminer l'intensité maximale I_m du courant dans le circuit et la valeur du coefficient d'inductance L.

4.2- Montrer que l'énergie $\mathscr{E}_m(t)$ peut s'écrire : $\mathscr{E}_m(t) = \frac{1}{4}CU_0^2[1 - \cos(4\pi N_0 t)]$

On rappelle que : $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\alpha)]$

4.3- Vérifier que la période T de $\mathscr{E}_m(t)$ est $T = \frac{T_0}{2}$; T_0 étant la période propre du dipôle LC.

En déduire la valeur de N_0.

4.4- Déterminer la valeur de la capacité C.

4.5- Montrer que l'énergie totale du circuit se conserve.

En déduire la valeur de la tenstion U_0. On prend $\pi^2 = 10$.

Scanned with CamScanner

Solution

1- Loi d'additivité des tensions:

$u_c + u_l = 0$.

Or $u_l = L\dfrac{di}{dt}$

et $i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{di}{dt} = C\dfrac{d^2u_c}{ct^2}$

D'où : $u_c + LC\dfrac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

ou bien : $\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u_c = 0$ (1)

2- Exprimons la dérivée seconde de $u_c(t)$:

On a:

$\dfrac{du_c}{dt} = -U_m(2\pi N_0).\sin 2\pi N_0 t$

$\dfrac{d^2u_c}{dt^2} = -U_m(2\pi N_0)^2\cos 2\pi N_0 t$

$= -(2\pi N_0)^2 U_m \cos 2\pi N_0 t$

$= -(2\pi N_0)^2 u_c(t)$

alors: $\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + (2\pi N_0)^2 u_c(t) = 0$

En identifiant cette expression à l'équation différentielle (1) on déduit que:

$(2\pi N_0)^2 = \dfrac{1}{LC}$, d'où: $N_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

- L'expression de la tension maximale U_m est obtenue en prenant la tension u_c à la date $t = 0$.

$u_c(0) = U_m\cos 0 = U_m$

Or, $u_c(0)$ représente la tension U_0 sous laquelle le condensateur à été chargé à la fermeture du circuit, donc: $U_m = U_0$

3-

$i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_c}{dt} = -2\pi N_0 CU_0\sin(2\pi N_0 t)$

$= -I_m\sin(2\pi N_0 t)$

avec: $I_m = 2\pi N_0 CU_0$

4.1- On utilise l'expression de l'énergie $E_m = \dfrac{1}{2}Li^2$.

Cette énergie prend sa valeur maximale lorsque l'intensité est maximale $i = I_m$.

Graphiquement: $E_{m_{max}} = 2.10^{-3}J$

et $I_m = 0,2A$.

De l'expression $\mathscr{E}_{m_{max}} = \dfrac{1}{2}LI_m^2$, on déduit que: $L = \dfrac{2\mathscr{E}_{m_{max}}}{I_m^2} = \dfrac{2.2.10^{-3}}{(0,2)^2} = 0,1H$

4.2- $\mathscr{E}_m(t) = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2}LI_m^2\sin^2(2\pi N_0 t)$

$= \dfrac{1}{2}L.4\pi^2 N_0^2 C^2 U_0^2 - \dfrac{1}{2}[1 - \cos 4\pi N_0 t]$

$= \dfrac{1}{4}L4\pi^2.\dfrac{1}{4\pi^2 LC}.C^2U_0^2[1 - \cos 4\pi N_0 t]$

$= \dfrac{1}{4}CU_0^2[1 - \cos 4\pi N_0 t]$

4.3- Si T est période de $\mathscr{E}_m(T)$, alors:

$\mathscr{E}_m(t+T) = \mathscr{E}_m(t)$

$\dfrac{1}{4}CU_0^2[1 - \cos 4\pi N_0(t+T)] =$

$\dfrac{1}{4}CU_0^2[1 - \cos 4\pi N_0 t]$

Ceci donne:

$\cos 4\pi N_0(t+T) = \cos 4\pi N_0 t$

ou encore:

$\cos(4\pi N_0 t + 4\pi N_0 T) = \cos 4\pi N_0 t$.

D'où: $4\pi N_0 T = 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{1}{2N_0} = \dfrac{T_0}{2}$

Autre méthode: $\mathscr{E}_m(t)$ est de la forme:

$\mathscr{E}_m(t) = a + b.\cos(4\pi N_0 t)$, sa période est donc: $T = \dfrac{2\pi}{4\pi N_0} = \dfrac{T_0}{2}$

Valeur de la fréquence N_0.

La figure (2-b) donne:

$N_0 = \dfrac{1}{2T} = \dfrac{1}{2.2.10^{-3}} = 250Hz$

4.4-

$C = \dfrac{1}{4\pi^2 LN_0^2} = \dfrac{1}{4\pi^2.0,1.(250)^2} \simeq 4\mu F$

4.5- On a:

$\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}Li^2 = \dfrac{1}{2}L(-I_m.\sin 2\pi N_0 t)^2$

$\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}L.I_m^2.\sin^2(2\pi N_0 t)$

D'après la réponse 3) On a:

$I_m = 2\pi N_0 CU_0$ et $N_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi LC}}$

D'où: $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}L.4\pi^2 N_0^2 C^2 U_0^2\sin^2(2\pi N_0 t)$

Et, $\mathscr{E}_e = \dfrac{1}{2}Cu_c^2 = \dfrac{1}{2}CU_0^2\cos^2(2\pi N_0 t)$

Donc:

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m + \mathscr{E}_e$

$\mathscr{E} = \dfrac{1}{2}CU_0^2[\sin^2(2\pi N_0 t) + \cos^2(2\pi N_0 t)]$

$\mathscr{E} = \dfrac{1}{2}CU_0^2 = cte$

Valeur de U_0 **:**

Première méthode:

D'après l'expression de I_m: $I_m = 2\pi N_0 CU_0$.

donc: $U_0 = \dfrac{I_m}{2\pi N_0 C}$.

$U_0 = \dfrac{0,2}{2\pi.250.4.10^{-6}} \simeq 31,8V$

Deuxième méthode à partir des deux expressions:

$\mathscr{E}_m = -\dfrac{1}{2}LI_m^2\sin^2(2\pi N_0 t)$

et $\mathscr{E}_e = \dfrac{1}{2}CU_0^2\cos^2(2\pi N_0 t)$;

lorsque $\sin^2(2\pi N_0 t) = 1$,

$\cos^2(2\pi N_0 t) = 0$ et inversement.

Et par suite:

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{m_{max}} + \mathscr{E}_{e_{min}} = \mathscr{E}_{e_{max}} + \mathscr{E}_{m_{min}}$

$\mathscr{E} = \dfrac{1}{2}CU_0^2 = \dfrac{1}{2}LI_m^2$

Ce qui permet de déduire que:

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{m_{max}} = \dfrac{1}{2}CU_0^2$

$U_0 = \sqrt{\dfrac{2\mathscr{E}_{m_{max}}}{C}} = \sqrt{\dfrac{2.2.10^{-3}}{4.10^{-6}}} \simeq 31,6V$

14 On réalise le montage de la figure (1) à l'aide des dipôles électriques suivants :

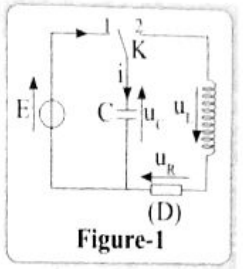


Figure-1

- Un générateur de tension constante $E = 12V$.
- Un condensateur non chargé de capacité C.
- Une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.
- Un conducteur ohmique (D) de résistance $R = 30\Omega$.
- Un interrupteur K.

Au début, on laisse le condensateur se charger totalement, et à une date $t = 0$, on bascule l'interrupteur à la position (2), et on visualise à l'aide d'un oscilloscope l'évolution de la tension u_R en fonction du temps.

L'oscillogramme obtenu est représenté sur la figure (2).

La droite (T) contenue dans cette figure est tangente à la courbe de $u_R(t)$ à l'origine des dates $(t = 0)$.

1- Quel est le régime des oscillations se produisant dans ce circuit?

2- Montrer que la tension u_R vérifie l'équation différentielle :

$u_R + RC.\dfrac{du_R}{dt} + L.C.\dfrac{d^2u_R}{dt^2} = 0$

3- Quelle est la valeur de la tension u_l aux bornes de la bobine à la date $t = 0$.

4- Déterminer en utilisant la figure 2, la valeur de $\dfrac{di}{dt}$ à la date $t = 0$.

5- En déduire la valeur de L.

Scanned with CamScanner

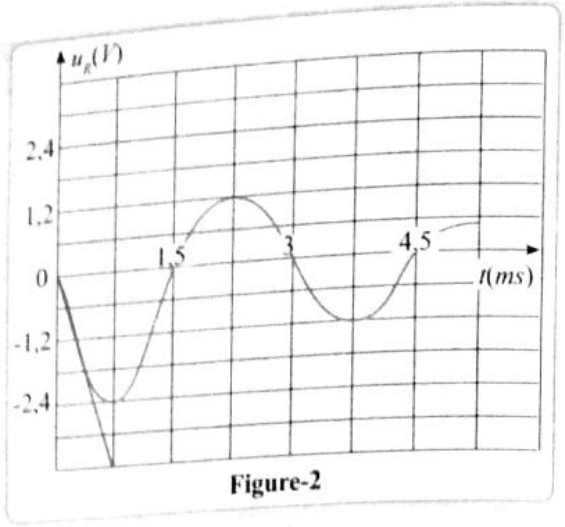


Figure-2

Solution

1- Oscillations electrique libres pseudo-périodiques.

2- Loi d'addivité des tensions:

$u_c + u_R + u_L = 0$.

Exprimons u_c et u_L :

$u_c = \frac{q}{C}$ et $u_L = L.\frac{di}{dt}$

En utilisant la loi d'ohm: $u_R = Ri$ on peut déduire que: $i = \frac{1}{R}u_R$

Donc: $u_L = L.\frac{1}{R}.\frac{du_R}{dt}$

Alors l'équation (1) donne:

$\frac{q}{C} + u_R + \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} = 0$

Effectuons la dérivée par rapport au temps :

$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{du_R}{dt} + \frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2}$

$\frac{dq}{dt} = i = \frac{1}{R}.u_R$

Alors, $\frac{1}{RC}u_R + \frac{du_R}{dt} + \frac{L}{R}\frac{d^2u_R}{dt^2} = 0$

D'où: $u_R + RC\frac{du_R}{dt} + LC\frac{d^2u_R}{dt^2} = 0$

3- Loi d'additivité des tensions à $t = 0$:

$u_c(0) + u_R(0) + u_L(0) = 0$

$E + 0 + u_L(0) = 0$,

d'où: $u_L(0) = -E = -12V$

4- $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}.\frac{du_R}{dt}$

$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0$

$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{1}{30}.\left(\frac{-3,6}{0,75.10^{-3}}\right) = -160A.s^{-1}$

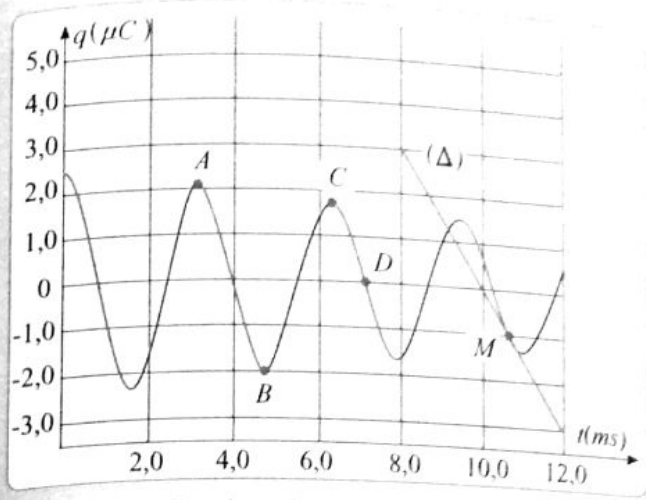
5-

$(u_L)_0 = L.\left(\frac{di}{dt}\right)_0$

$L = \frac{(u_L)_0}{\left(\frac{di}{dt}\right)_0} = -\frac{12}{-160} = 7,5.10^{-2}H$

15 On réalise l'étude expérimentale d'un oscillateur électrique contenant un condensateur de capacité $C = 0,50\mu F$ et une bobine d'inductance $L = 0,50H$. Soit R la résistance totale du circuit.

A l'aide d'une carte d'acquisit ion reliée à un ordinateur et d'un logiciel de traitement des données, on obtient les variations de la charge du q condensateur en fonction du temps t.



1- Vérifier que l'énergie électrique du circuit se trouve entièrement emmagasinée dans le condensateur. aux dates telles que t_A, t_B et t_C.

2- Que peut-on dire de l'énergie électrique du circuit à la date t_D?

3- Considérons le point M de la figure où (Δ) est la droite tangente à la courbe de $q(t)$ en ce point.

Calculer l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit à la date t_M.

Solution

1- Après chaque demi-pseudo-périodes les droites tangentes à la courbe de $q(t)$ sont horizontales, donc la dérivée $\frac{dq}{dt}$ est nulle.

D'où: $i = 0 \Rightarrow \mathscr{E}_m = 0$.

L'énergie du circuit est totalement emmagasinée dans le condensateur aux dates t_A, t_B, t_C ...

2- A la date t_D, on a : $q = 0 \Rightarrow \mathscr{E}_e = 0$.

La bobine emmagasine toute l'énergie du circuit.

3- **Au point M :**

$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2.0,5.10^{-6}}(-10^{-6})^2 = 1\mu J$

$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$

Dans ce cas, i peut être déterminé graphiquement.

$i = \frac{dq}{dt} = \frac{-6.10^{-6}}{4.10^{-3}} = -1,5.10^{-3}A$

$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}.0,5.(-1,5.10^{-3})^2 = 0,56\mu J$

Energie du circuit à la date t_D :

$\mathscr{E} = 1,56\mu J$

16 On réalise le montage de la figure (1) où le condensateur est initialement déchargé et la résistance de la bobine est négligeable.

Scanned with CamScanner

On balance d'interrupteur K à la position 1 et laisse le condensateur se charger complètement.

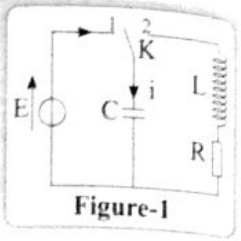


Figure-1

A une date prise comme origine du temps ($t = 0$) on balance l'interrupteur a la position 2 et on visualise les variations de la tension u_c aux bornes du condensateur au cours du temps (figure 2).

1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c.

2- L'expression de $u_c(t)$ vérifiant cette équation différentielle est de la forme.

$u_c(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$

2.1- Exprimer le rapport $\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)}$ en fonction de T et λ.

2.2- Déterminer la valeur de λ.

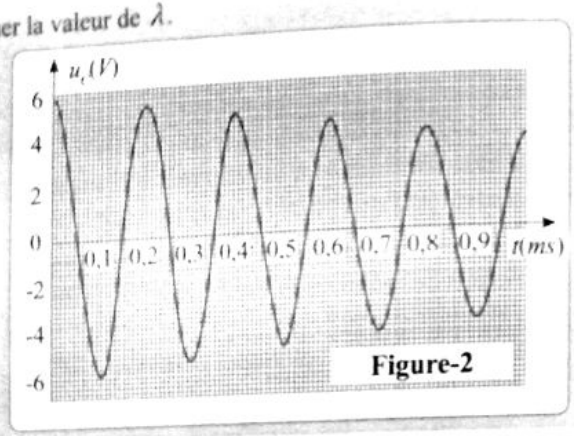


Figure-2

Solution

1- $u_c + u_l + u_R = 0$

$u_c + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$

or $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_c)}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}$

Donc: $u_c + LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC.\frac{du_c}{dt} = 0$

ou bien: $u_c + RC.\frac{du_c}{dt} + LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2.1- A la date $(t+T)$ on a:

$u_c(t+T) = E.e^{-\frac{t+T}{\tau}}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t+T)+\varphi\right)$

$= E.e^{-\frac{t}{\tau}}.e^{-\frac{T}{\tau}}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi + \varphi\right)$

$= e^{-\frac{T}{\tau}}.E.e^{-\frac{t}{\tau}}.\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$

$= e^{-\frac{T}{\tau}}.u_c(t)$

D'où le rapport: $\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)} = e^{-\frac{T}{2\lambda}}$

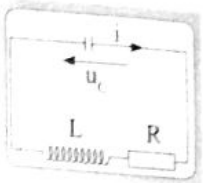
2.2- Ce rapport pris entre $t = 0$ et $t = T$ vaut 0,9.

Donc: $e^{\frac{T}{2\lambda}} = 0,9 \Rightarrow -\frac{T}{2\lambda} = Ln(0,9)$

D'où: $\lambda = -\frac{T}{2Ln(0,9)}$

$\lambda = -\frac{2.10^{-4}}{2Ln(0,9)} \simeq 9,5.10^{-4}s$

17 La figure 2 montre les variations de la charge q d'un condensateur initialement chargé, branché aux bornes d'un dipôle RL à la date : $t = 0$.



1- Montrer que : $q = q(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_0^2}q = 0$, avec T_0 : période propre de (LC).

Exprimer λ en fonction de R et L.

2- Un appareillage convenable a permis d'obtenir la figure (2).

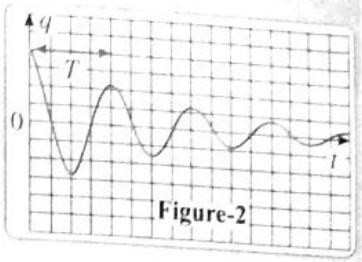


Figure-2

2.1- qu'appelle-t-on ce type d'oscillations?

2.2- La pseudo-période de ces oscillations est:

$T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}}$

Quelle condition doit vérifier R par rapport à la résistance $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ pour que: $T \simeq T_0$?

Solution

1- Loi d'additivité des tensions:

$u_c + u_l + u_R = 0$

$\frac{q}{C} + Ri + L.\frac{di}{dt} = 0$ tenant compte de:

$i = \frac{dq}{dt}$, on écrit:

$\frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

D'où: $q + RC\frac{dq}{dr} + LC.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

ou encore: $\frac{dq^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$

En posant: $\frac{R}{L} = 2\lambda$, et avec : $LC = \frac{T_0^2}{4\pi^2}$

on obtient: $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda.\frac{dq}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_0^2}q = 0$

2.1- Oscillations électriques libres pseudo-périodiques.

2.2- $T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}}$

$T = \frac{1}{\frac{1}{T_0^2}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2T_0^2}{4\pi^2}}}$

$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2T_0^2}{4\pi^2}}}$

La condition $T \simeq T_0$ impose que:

$1 - \frac{\lambda^2T_0^2}{4\pi^2} \simeq 1$

Pour cela, il faut que:

$\frac{\lambda^2T_0^2}{4\pi^2} << 1$

alors: $\lambda << \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

avec: $\lambda = \frac{R}{2L}$ on a: $\frac{R}{2L} << \frac{1}{\sqrt{LC}}$

D'où: $R << 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$R << R_c$

Scanned with CamScanner

18 **On considère le circuit électrique de la figure (1), composé des éléments suivants:**

- Un générateur de tension constante E, et de résistance négligeable
- Une bobine d'induction L_0 et de résistance négligeable
- Deux conducteurs ohmiques de résistances respectives r et $R = 20\Omega$
- Un condensateur de capacité C réglable, non chargé initialement
- Un interrupteur K à deux positions.

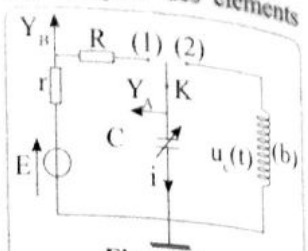


Figure-1

1- Etude du diplôme RC :

On règle la capacité du condensateur sur une valeur notée C_0 et on bascule K à la position (1); à une date $t = 0$. Un enregistrement a permis d'obtenir sur les voies y_A et y_B, les deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) de la figure (2).

La droite (T) représente la tangente à la courbe (C_1) à la date $t = 0$.

1.1- Parmi les deux courbes (C_1) et (C_2), laquelle représente la tension $u_c(t)$. Justifier.

1.2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$.

1.3- Montrer que l'intensité du courant à la fermeture du circuit (1) est: $i_0 = \dfrac{E}{R+r}$.

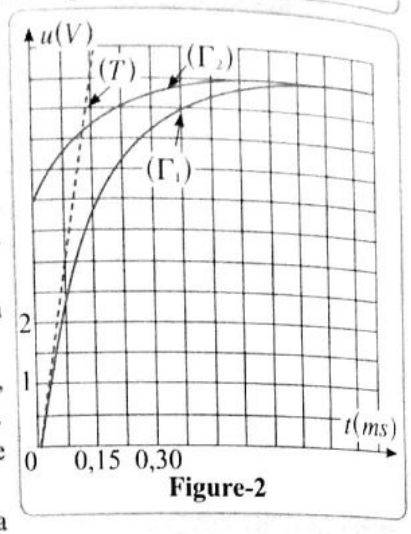


Figure-2

1.4- En expliquant les courbes de la figure (2):

1.4.1- Déterminer la valeur de r.

1.4.2- Vérifier que $C_0 = 5\mu F$.

2- Etude du circuit idéal LC :

Lorsque le régime permanent est établi, on bascule l'interrupteur à la position (2), à une date prise comme nouvelle origine des temps $(t = 0)$, on obtient ainsi un circuit (LC) idéal.

2.1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant $i(t)$.

2.2- La solution de cette équation différentielle est $i(t) = I_m \cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$. Trouver la valeur de φ.

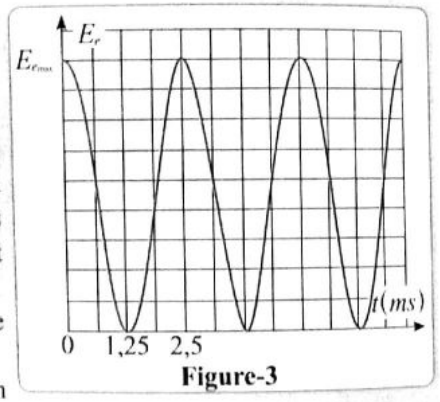


Figure-3

2.3- En utilisant l'expression de la puissance électrique, établir l'expression de l'énergie $E_e(t)$ emmagasinée par le condensateur, à la date t, en fonction de C et $q(t)$.

2.4- La figure (3) représente l'évolution de l'énergie $E_e(t)$ emmagasinée par le condensateur à la date t.

2.4.1- Calculer E_{emax}.

2.4.2- A l'aide d'une étude énergétique, déterminer la valeur de L_0.

Solution

1- Etude du dipôle RC :

1.1- Courbe associée au condensateur:

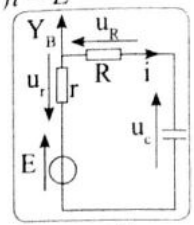
Puisque le condensateur est initialement déchargé, on a: $u_c(0) = 0$, c'est la courbe (1) qui vérifie cette condition.

1.2- Equation différentielle par u_c :

La loi d'additivité des tensions appliquée à ce circuit s'écrit: $u_C + u_R + u_r = E$,

avec $u_R = Ri$ et $u_r = ri$, il vient:

$u_C + (R+r)i = E$



Comme $i = \dfrac{da}{dt} = C.\dfrac{du_C}{dt}$;

$u_C + (R+r)C.\dfrac{du_C}{dt} = E$

1.3- Expression de i_0 :

Puisque $u_C(0) = 0$, l'équation précédente donne $0 + (R+r).i = E$.

d'où: $i_0 = C\left(\dfrac{du_C}{dt}\right) = \dfrac{E}{R+r}$

1.4.1- Valeur de r :

La courbe (C_2) représente la tension u_2:

$u_2 = E - u_r = E - ri$

à $t = 0$: $u_2(0) = E - ri(0) = E - ri_0$

$i_0 = \dfrac{E - u_2(0)}{r}$ (2)

En identifiant i_0 avec expression trouvée à la question précédente, on écrit:

$\dfrac{E - u_2(0)}{r} = \dfrac{E}{R+r}$

D'où: $RE + rE - (R+r)u_2(0) = rE$

$(R+r)u_2(0) = RE$

$r = \dfrac{RE}{y_2(0)} - R$

$r = R\left(\dfrac{E}{u_2(0)} - 1\right)$

$r = 20\left(\dfrac{6}{4} - 1\right) = 10\Omega$

1.4.2- Vérifions de la valeur de C_0 :

La constante de temps de ce circuit est: $\tau = (R+r)C_0$, ce qui permet de tirer C_0:

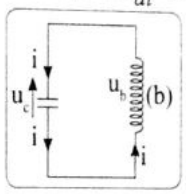
$C_0 = \dfrac{\tau}{R+r} = \dfrac{0,15.10^{-1}}{30} = 5.10^{-6}F$

2- Etude du circuit LC :

2.1- Equation différentielle vérifiée par i :

En utilisant la convention utilisée sur le schéma on a:

$u_c + u_b = 0$ avec $u_b = L.\dfrac{di}{dt}$ et $u_C = \dfrac{q}{C}$,



on a: $\dfrac{q}{C} + L.\dfrac{di}{dt} = 0$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on a: $\dfrac{1}{C}.\dfrac{dq}{dt} + L.\dfrac{di}{dt} = 0$

ou encore: $\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}.i = 0$

2.2- Valeur de φ :

Scanned with CamScanner

A la date $t=0$, date de fermeture du circuit (LC) le régime permanent était d'établir dans le condensateur, alors:

$u_C = cte = E$, d'où: $i = C.\frac{du_C}{dt} = 0$

Donc $i(0) = I_m.\cos(\varphi)$ et par suite:

$\cos\varphi = 0$, d'où: $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}(rad)$.

Cherchons une autre condition sur φ:

On a: $u_b = -u_C$ et $u_b = L.\frac{di}{dt}$ d'où:

$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}u_C$

$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{L}u_C(0) = -\frac{E}{L} < 0$

En dérivant $i(t)$, on a:

$\frac{di}{dt} = -\frac{2\pi I_m}{T_0}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

Alors, à $t=0$: $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = -\frac{2\pi I_m}{T_0}\sin\varphi$

Puisque: $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 < 0$, on a alors $\sin\varphi > 0$

C'est-à-dire: $\varphi = +\frac{\pi}{2}(rad)$

2.3- Expression de $E_e(t)$:

On a: $p = u_C.i$ et $p = \frac{dE_e}{dt}$, d'où:

$\frac{dE_e}{dt} = u_C.i = \frac{q}{C}.\frac{dq}{dt}$

En remplaçant i on écrit:

$\frac{dE_e}{dt} = \frac{1}{C}.q.\frac{dq}{dt}$

D'où: $E_e = \frac{1}{2C}q^2 + cte$

On a: $E_e(0) = 0$ car le condensateur est initialement non chargé.

$E_e(t) = \frac{1}{2C}.q^2(t)$

2.4.1- Valeur de $E_{e(max)}$:

$E_{e(max)} = \frac{1}{2C}.q^2_{max} = \frac{1}{2C}.(CE)^2 = \frac{1}{2}CE^2$

$E_{e(max)} = \frac{1}{2}.5.10^{-6}.(6)^2 = 9.10^{-5}J$

2.4.2- Valeur de I_m:

A la date $t = 1,25ms$, l'énergie E_e devient nulle, celle emmagasinée dans la bobine devient maximale, sa valeur est alors:

$E_{m(max)} = E - E_{C(min)} = E - 0 = E$

Lorsque E_C est maximale en $E_m = 0$.

On déduit $E_{m(max)} = E_{e(max)}$

$\frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CE^2$

$I_m = E\sqrt{\frac{C}{L}}$

On détermine L en utilisant la période T:

$T = \frac{T_0}{2} = \pi\sqrt{LC}$

D'où:

$L = \frac{T^2}{\pi^2.C} = \frac{(2,5.10^{-3})^2}{\pi^2.5.10^{-6}} = 0,126H$

$I_m = \sqrt{\frac{5.10^{-6}}{0,126}}.6.10^{-3}$

$I_m = 37,8.10^{-3}mA \simeq 38mA$

19 On réalise le montage de la figure 1, comprenant:

- Un générateur idéal d'intensité.
- Un microampèremètre.
- Deux conducteurs ohmiques dont les résistances sont respectivement R_0 et $R = 40\Omega$.
- Un condensateur initialement déchargé, de capacité C.
- Une bobine de résistance $r = 8\Omega$ et de coefficient d'inductance $L = 0,6H$.
- Deux interrupteurs de courant K_1 et K_2.

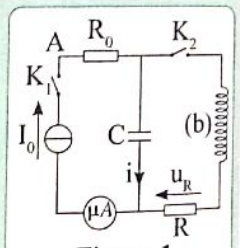


Figure-1

1- Etude du dipôle RC:

On ferme K_1 à une date $(t=0)$, K_2 étant ouvert, la valeur indiquée par le microampèremètre est $I_0 = 4\mu A$.

Un système d'acquisition de données a permis de tracer les variations de la tension $u_{AB}(t)$ figure (2).

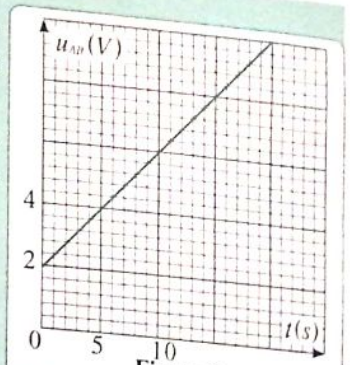


Figure-2

1.1- Déterminer la valeur de la résistance R_0.

1.2- Trouver la valeur de la capacité C.

2- Etude du dipôle RLC:

A la date où la tension aux bornes du condensateur prend la valeur $u_C = U_0$, on ouvre K_1 et on ferme K_2. Cette date est prise comme nouvelle origine du temps $(t=0)$. Un système d'acquisition des données a permis de tracer les variations de la tension $u_R(t)$ figure (3). Sur cette figure la droite (T_1) représente la tangente à la courbe de $u_R(t)$ à la date $t=0$.

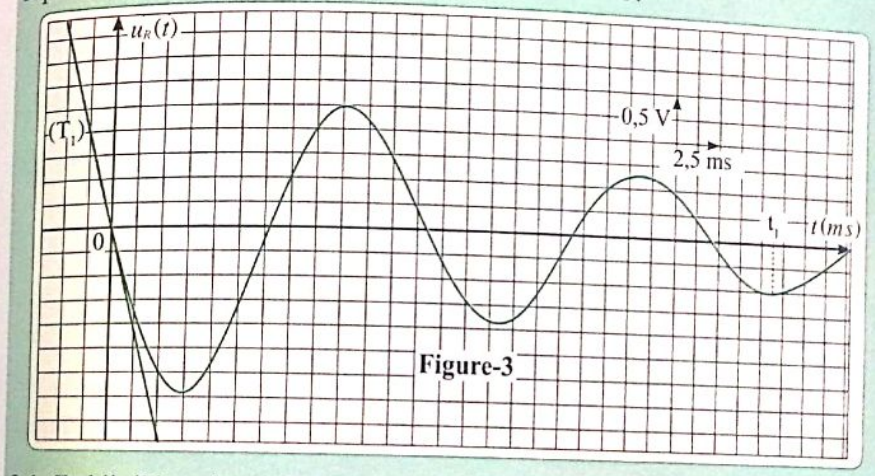


Figure-3

2.1- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur.

2.2- Soit E_t, l'énergie totale du circuit à la date t.

Exprimer $\frac{dE_t}{dt}$ en fonction de t et i, intensité du courant traversant le circuit à cette date.

2.3- Montrer que: $U_0 = -\frac{L}{R}\left(\frac{du_R}{dt}\right)_{t=0}$. Calculer U_0.

2.4- Trouver $|E_J|$, l'énergie dissipée par effet joule dans le circuit entre les dates $t_0 = 0$ et $t = t_1$.

Scanned with CamScanner

Solution

1- Etude du dipôle RC :

1.1- Valeur de R_0 :

En considérant la branche AB du circuit, on peut écrire:

$u_{AB} = u_{R_0} + u_C = I_0 + u_C$

A la date $t = 0$, on a $u_C = 0$, alors:

$R_0 = \frac{u_{AB}(0)}{I_0} = \frac{2}{4.10^{-3}} = 500K\Omega$

1.2- Valeur de C :

Exprimons la tension u_C en fonction du temps.

On sait que : $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$, et puisque $i = I_0 = cte$, et $u_C(0) = 0$; on peut écrire:

$u_C = \frac{I_0}{C}.t$ (1)

Et, puisque

$u_{AB}(t) = A.t + B = At + u_{AB}(0) = At + R_0 I_0$

et, $u = u_{AB}(t) - u_{R_0} = u_{AB}(t) - R_0 I_0$

$= At + R_0 I_0 - R_0 I_0 = A.t$

En identifiant ce résultat avec l'expression (1), on déduit que:

$\frac{I_0}{C} = A$: pente de la droite $u_R(t)$

d'où: $C = \frac{I_0}{A} = \frac{4.10^{-6}}{\frac{4-2}{5}} = 10^{-5}F$

2- Etude du dipôle RLC :

2.1- Equation différentielle:

D'après la loi d'additivité des tensions:

C'est-à-dire: $\frac{q}{C} + Ri + ri + L\frac{di}{dt} = 0$ (1)

ou encore: $\frac{q}{C} + (R+r)\frac{dq}{dt} + L.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

ou bien: $q + (R+r)C.\frac{dq}{dt} + LC\frac{d^2q}{dt^2} = 0$

2.2- Expression de la dérivée de l'énergie E_t en fonction du temps:

L'énergie E_t est l'énergie emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine, soit donc:

$E_t = E_c + E_m = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}Li^2$

Dérivons cette expression par rapport au temps t :

$\frac{dE_t}{st} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2C}.q^2 + \frac{1}{2}Li^2\right]$

$\frac{dE_t}{st} = \frac{1}{C}.q.\frac{dq}{dt} + L.i + \frac{di}{dt}$

$\frac{dE_t}{st} = i\left[\frac{1}{C}.q + L.\frac{di}{dt}\right]$

En revenant à la question (1), on déduit que:

$\frac{1}{C}q + L.\frac{di}{dt} = -(R+r)i$

Alors: $\frac{dE_t}{dt} = i(-R+r)i = -(R+r)i^2$

2.3- Expression de U_0 :

A la date t : $u_C + u_R + u_b = 0$

ou encore: $u_C + u_R + r.i + L\frac{di}{dt} = 0$

Remplaçons i par : $i = \frac{1}{R}u_R$

$u_C + u_R + \frac{r}{R}u_R + \frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} = 0$

A la date $t = 0$, on $u_C = U_0$

Et, d'après la figure (3): $u_R(0) = 0$

Soit donc: $U_0 + \frac{L}{R}\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0 = 0$

D'où: $U_0 = -\frac{L}{R}\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0$

$U_0 = -\frac{0,6}{40}\left(\frac{-4.0,5}{2,5.10^{-3}}\right) = 12V$

2.4- Energie dissipée par effet Joule:

$|E_J| = |E_t(t_1) - E_t(t_0)| = E_t(t_0) - E_t(t_1)$

$E_t(0) = E_C(t_0) + E_m(t_0)$

$E_t(0) = \frac{1}{2}CU_0^2 + \frac{1}{2}L.\underbrace{i^2(0)}_{=0} = \frac{1}{2}C.U_0^2$

$E_t(1) = E_C(t_1) + E_m(t_1)$

$E_t(1) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t_1) + \frac{1}{2}L.i^2(t_1)$

En utilisant la loi d'Ohm: $i(t_1) = \frac{1}{R}u_R(t_1)$, alors:

$E_m(t_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_R(t_1)}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{R^2}u_R^2(t_1)$

Et en utilisant l'équation différentielle à t_1 on écrit:

$u_C(t_1) + (r+R)i_1 + L.\left(\frac{di}{dt}\right)_1 = 0$

$u_C(t_1) + (r+R).\frac{u_R(t_1)}{R} + \frac{L}{R}.\left(\frac{du_R(t_1)}{dt}\right)_1$

A la date t_1, on remarque d'après le graphe (3) que: $\frac{du_R}{dt} = 0$.

Donc: $u_C(t_1) = -\frac{r+R}{R}u_R(t_1)$

Alors: $E_e(t_1) = \frac{1}{2}C.u_C^2(t_1)$

$= \frac{C(R+r)^2}{2R^2}.u_R^2(t_1)$

Donc: $E_e(1) = E_e(t) + E_m(1)$

$= \frac{1}{2R^2}U_R(t_1)[C(R+r)^2 + L]$

Par suite:

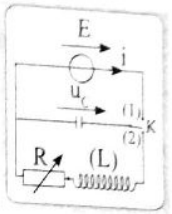
$|E_J| = \frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2R^2}U_R(t_1)[L + C(R+r)^2]$

$|E_J| = \frac{1}{2}.5.10^{-7}.4$

$- \frac{1}{2(40)^2}.(0,5)^2[0,6 + 5.10^{-7}(40+8)^2]$

$\simeq 6,7.10^{-5}J$

20 Le montage de la figure suivante comprend:



- Un générateur de tension constante $E = 6V$
- Un condensateur de capacité $C = 40nF$
- Une bobine d'inductance $L = 10mH$ et de résistance négligeable.
- Un conducteur Otmique de résistance R réglable sur des valeurs permettant d'obtenir des oscillations éléctriques libres pseudo-périodiques de pseudo-période T
- Un interrupteur K à deux positions (1) et (2).

On bascule l'interrupteur K à la position (1), une fois le condensateur est totalement chargé; on bascule (K) à la position (2) à une date prise comme origine des temps $(t = 0)$.

Les pertes par effet Joule de l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit sont exprimées par la relation suivante: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -Ri^2$, où R est la résistance du circuit et i l'intensité du courant électrique à une date t.

1- En utilisant une méthode énergétique, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C est de la forme:

$\frac{d^2uc}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{duc}{dt} + \omega_0^2.uc = 0$

Avec; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; T_0 : période propre du cicruit.

2- On exprime la solution de l'équation différentielle précédente par:

$u_c(t) = E.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}.\cos\omega t$, où:

$Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

Scanned with CamScanner

2.1- Etablir que: $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

2.2- Quelle est la valeur de Q_{min}, valeur minimale que doit prendre le coefficient Q pour que les oscillations soient pseudo-périodiques.

2.3- Q est appele «facteur de qualité des oscillations» justifier cette appelation.

3- Quelle valeur doit-on donner à R, pour obtenir des ascillations de pseudo-période T égale à $126\mu s$?

Solution

1- Equation différentielle:

A une date t, l'énergie emmagasinée dans le circuit est: $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$

d'où: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2}C.1u_c.\frac{duc}{dt} + \frac{1}{2}L.2i\frac{di}{dt}$

On remplace $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ par $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -Ri^2$,

on a $-Ri^2 = C.uc.\frac{duc}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$

Si on tient compte de: $i = C.\frac{duc}{dt}$, on écrit

$-Ri = uc + L\frac{di}{dt}$

Alors: $u_c + Ri + L\frac{di}{dt} = 0$

Ou encore: $uC + RC\frac{du_c}{dt} + LC.\frac{du_c^2}{dt^2}$

Ou bien $\frac{d^2uc}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}u_c = 0$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$

2.1- Expression de T :

On a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, l'expression de Q donne

$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$, donc

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

alors $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

d'où: $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

2.2- Condition sur Q :

Dans l'expression de T, on doit avoir:

$1 - \frac{1}{4Q^2} > 0 \Longrightarrow 4Q^2 > 1 \Longrightarrow Q \geq \frac{1}{2} = Q_{min}$

2.3- Justification de l'appelation de Q

D'après l'expression $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, on remarque que les oscillations pseudo-périodiques sont idéales lorsque:

$R \longrightarrow 0$ et $Q \longrightarrow \infty$.

Pour des valeurs de $R \neq 0$, les oscillations se rapprochent du cas idéal, au fur et à mesure que Q augmente.

3- Valeur de R :

On a: $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}} = \dfrac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{Q^2}}}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \omega_0^2 - \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2}$

$R = 2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{4\pi^2}{T^2}}$

$R = 2.10^{-3}\sqrt{10^3 - \frac{4\pi^2}{(126.10^{-6})^2}}$

$R = 73\Omega$

9 COMPORTEMENT D'UN CIRCUIT (RLC) EN REGIME SINUSOIDAL FORCE

I- Généralités:

1 Fonctions sinusoïdales:

- Une tension est dite alternative sinusoïdale, si elle s'exprime par $u(t) = U_m.\cos(\omega t + \varphi)$

ω: pulsation; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$

φ: phase à l'origine des dates.

- Courant alternatif sinusoïdal: $i(t) = \frac{I}{m}\cos(\omega t + \varphi)$

2 Valeurs efficaces:

A toute tension alternative sinusoïdale, est associée un valeur efficace U, liée à sa valeur maximale U_m par: $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

La tension efficace est mesurée directement à l'aide d'un voltmètre.

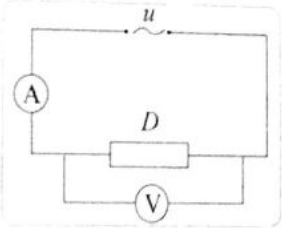
Intensité efficace: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

L'intensité efficace est mesurée directement à l'aide d'un ampèremètre.

3 Impédance d'un dipôle:

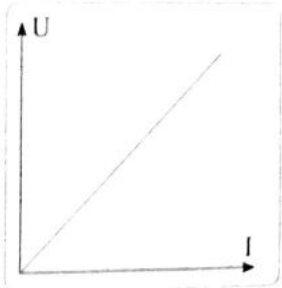
3.1- Définition:

Lorsqu'on applique à un dipôle D, une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace U, il est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de même fréquence et d'intensité efficace I dépendant de U.



L'impédance d'un dipôle en régime alternatif sinusoïdal est définie par: $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$

Z s'exprime en $Ohm\,(\Omega)$ comme une résistance



3.2- Impédance d'un dipôle (RLC):

- L'impédance d'un dipôle RLC soumis à une tension alternative sinusoïdale de fréquence N dépend des paramètres R, L et C de ce dipôle et de la fréquence N de la tension imposée à ce dipôle.

Scanned with CamScanner

- Pour un dipôle RLC : $Z \geq R$

- Le rapport exprimant l'impédance n'est pas valable avec les valeurs instantanées $u(t)$ et $i(t)$.

4 Déphasage entre deux tensions sinusoïdales:

Soit deux tensions sinusoïdales $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de même période: $u_1(t) = U_{1m}.\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$

- Lorsque $\varphi_1 = \varphi_2$, $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont en phase figure (a)

- Lorsque $\varphi_1 \neq \varphi_2$: les courbes sont décalées. Le déphasage noté $\Delta\varphi$ ou (figure b)

φ est: $\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = \omega.\tau = \frac{2\pi\tau}{T}$

Dans le cas de la figure (b);

$\varphi_1 > \varphi_2$ alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$u_1(t)$ est en avance de phase sur $u_2(t)$: alors $\varphi_1 > \varphi_2$

D'où $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\tau}{T}$

L'analyse du graphe donne la valeur de φ:

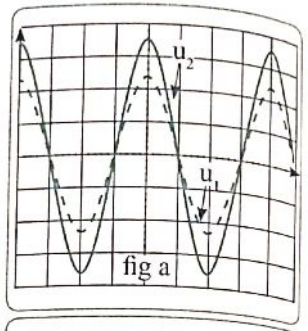


fig a

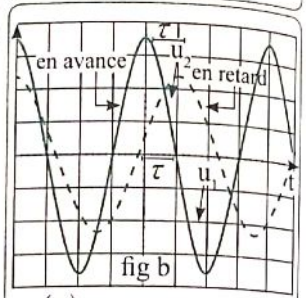


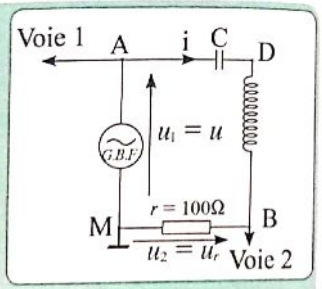
fig b

$u_1(t)$ en avance de phase sur $u_2(t)$

Exercice d'application 1

On réalise le montage de la figure ci-contre.

Sur l'oscilloscope bicourbe, on a observé aux bornes du dipôle BM, la tension $u_2 = u_r$ et la tension $u_1 = u$ aux bornes du dipôle AM.



On donne:

• Sensibilité verticale:

voie1: $2V.div^{-1}$; voie 2: $500mV.div^{-1}$.

$u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_1)$

$u_r(t) = u_{rm}\cos(\omega t + \varphi_2)$

1- Déterminer les amplitudes U_m et U_{rm}.

2- En utilisant la loi l'Ohm au dipôle BM, montrer que $i(t) = I_m.\cos(\omega t + \varphi_2)$

- Que peut-on dire du déphase entre $u_r(t)$ et $i(t)$?

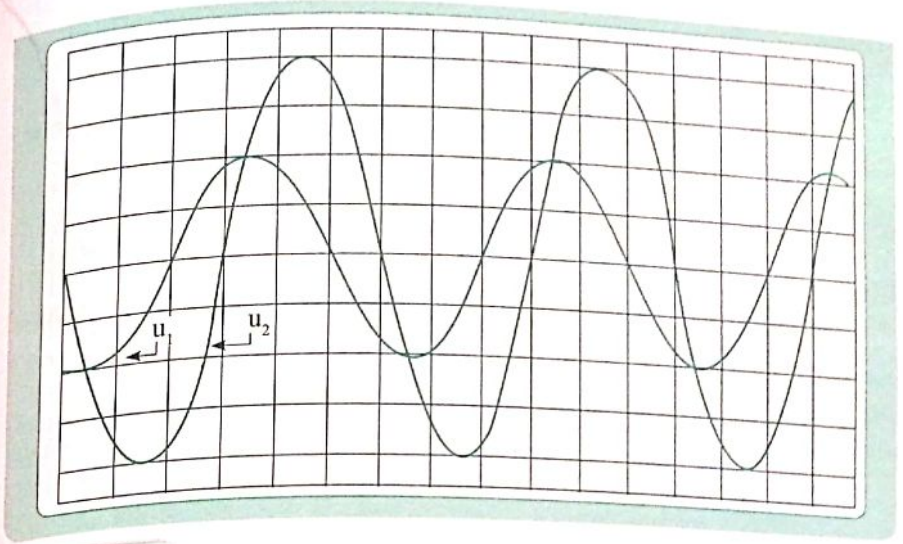
- Calculer l'intensité maximale I_m traversant le circuit.

3- Laquelle des deux sinusoïdes $u(t)$ et $i(t)$ est en avance de phase?

Comparer φ_1 à φ_2.

4- Calculer le déphasage φ entre $u(t)$ et $i(t)$

Sachant que $\varphi_2 = 0$, donner la valeur de φ_1.



Solution

1- $U_m = 2div \times 2vdiv^{-1} = 4V$

$U_{rm} = 4div.500mV.div^{-1} = 2000mV = 2V$

2- A une date t : $u_r(t) = r.i(t)$

alors $i(t) = \frac{1}{r}.U_r(t) = \frac{U_{rm}}{r}.\cos(\omega t + \varphi_2)$

$= I_m.\cos(\omega t + \varphi_2)$

• On remarque que u_r et i sont en phase.

• $I_m = \frac{U_{rmax}}{r} = \frac{2}{100} = 2.10^{-2}A$

3- $u_1(t)$ est en avance de phase sur $u_2(t)$;

C'est-à-dire $u(t)$ en avance sur $i(t)$.

- On déduit que $\varphi_1 > \varphi_2$

4- $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2| = \varphi_1 - \varphi_2$

$\varphi = \omega.\tau = 2\pi.\frac{1divisions}{6\,divisions} = \frac{\pi}{3}rad$

$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi + \varphi_2 = \frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{3}rad$

I- Résonance en intensité:

1 Définition du régime sinusoïdal forcé:

- Un circuit RLC en régime d'oscillations libres est caractérisé par une fréquence

Scanned with CamScanner

$N_0 = \frac{1}{T_0}$.

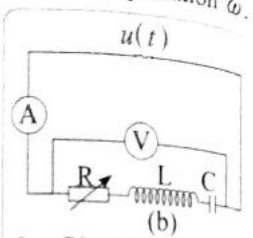
- Quand un générateur de tension sinusoïdale est branché aux bornes d'un dipôle RLC, il impose une tension et une intensité sinusoïdales de pulsation ω. Ces oscillations sont appelées **oscillations forcées**.
- Les valeurs prises par l'impédance et le déphasage dépendent de la fréquence imposée par le générateur.

2 Montage de l'étude de la résonance:

soit le circuit représenté sur la **figure** comprenant:
- Un générateur de tension alternative sinusoïdale dont la valeur efficace U est maintenue constante.
- Un dipôle RLC série dont la résistance R est réglable.

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi Nt + \varphi)$$

$$i = I\sqrt{2}\cos 2\pi Nt$$



$L = 70mH$

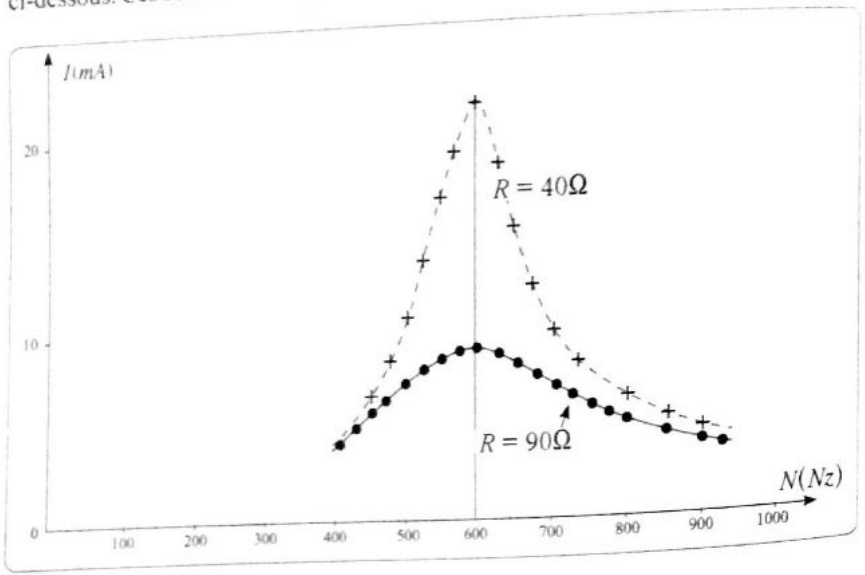
$C = 1\mu F$

résistance de la bobine négligeable devant R

3 Réponse en intensité:

La valeur de R étant fixée, faisons varier la fréquence N, donc la pulsation ω, et mesurons l'intensité efficace I, la tension efficace aux bornes du générateur étant maintenue constante.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de R sont regroupés dans les graphiques ci-dessous. Ces courbes sont appelées **courbes de réponse** en intensité du dipôle RLC.



4 Résonance:

Les courbes obtenues admettent chacune un maximum.

Quelle que soit la valeur de R, les maxima correspondent à la même valeur de la fréquence; dans ce cas particulier de cet exemple:

$N = 600\ Hz$

➔ ***Calculons la propre du circuit*** RLC **:**

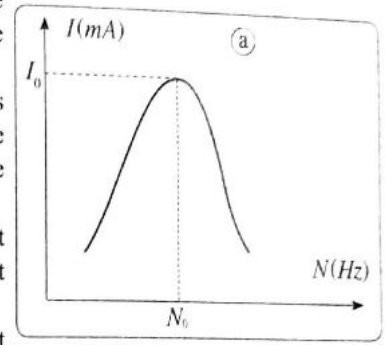
$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{70.10^{-3}.10^{-6}}} \simeq 600Hz$$

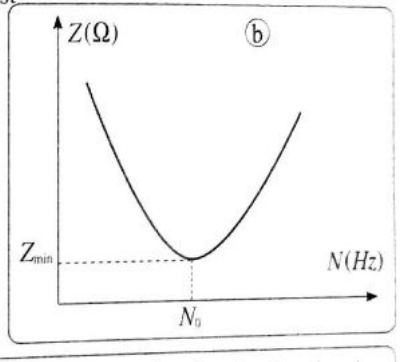
- La résonance correspond au maximum de la courbe de réponse.
- A la résonance, la fréquence imposée par le générateur est égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

La courbe de réponse est plus ou moins «pointue», selon la valeur de R qui caractérise l'«amortissement» de l'oscillateur électrique étudié.

Pour une faible valeur de R, la courbe est très «pointue»: on dit que la résonance est aiguë.

Pour une grande valeur de R, la courbe est «plate»: on dit que la résonance est floue.





5 **Propriétés du circuit à la résonance:**

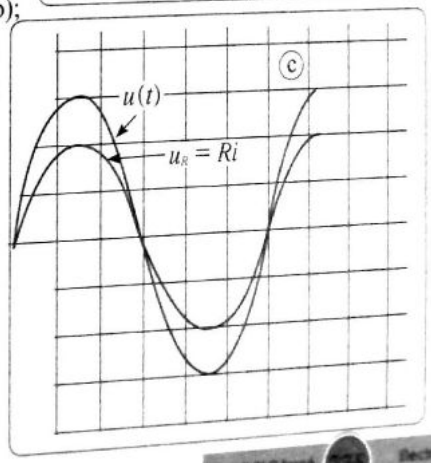
- La fréquence N des oscillations est alors égale à la fréquence propre du circuit:

$$N_{OSC} = N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- L'intensité efficace est maximale I_0 (a)
- L'impédance du circuit est minimale (b); Sa valeur coïncide avec sa résistance équivalente du circuit

$$Z_{min} = R + r = \frac{U}{I_0}$$

- Le dipôle R,L,C se comporte comme un conducteur ohmique.
- La tension imposée par le générateur et l'intensité sont en phase (c).



6 **Acuité de la résonance:**

bande passante et facteur de qualité

➔ **Bande passante à 3dB:**

Scanned with CamScanner

- On nomme bande passante à 3dB la gamme des fréquences comprises entre N_{min} et N_{max} pour lesquelles l'intensité du circuit est supérieure à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

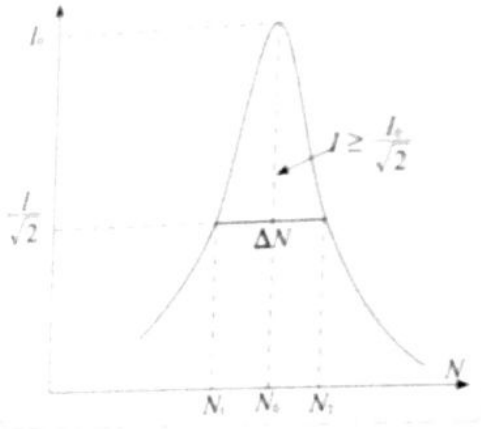
- La largeur de la bande passante est définie par $\Delta = N_{max} - N_{min}$; elle augmente avec la résistance du circuit et elle est indépendante de la tension efficace imposée.

➔ **Facteur de qualité:**

- Le facteur de qualité défini par le rapport sans dimensions $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$ traduit la sélectivité du circuit.

- Q est un nombre sans dimension. Q est d'autant plus grand que la résonance est aiguë.

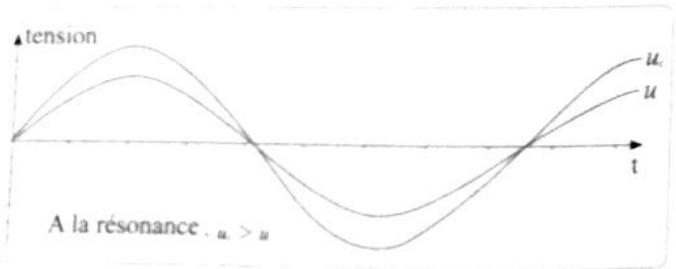
- Le facteur de qualité Q dépend uniquement de R, L et C, paramètres du dipôle.



➔ **Phénomène de surtension:**

On inverse maintenant la position du condensateur et du conducteur ohmique de façon à mesurer u et u_c.

On remarque que la tension aux bornes du condensateur est plus élevée que la tension maximale du générateur; il y a «surtension».



7 Puissances en courant alternatif sinusoïdal:

➔ **Puissance instantanée consommée par un dipôle RLC:**

Considérons un dipôle RLC soumis à une tension $u(t) = U_m \cos \omega t$ et traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

La puissance instantanée $p(t)$ consommée par ce dipôle a pour expression:

$p \Longleftrightarrow u.i = U_m I_m \cos \omega t . \cos(\omega t + \varphi)$

- Puissance moyenne:

On la note P et on la définit sur

$P = \frac{\Delta \mathcal{E}}{T}$, $P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \Longrightarrow d\mathcal{E} = p.dt = u.i.dt$

$$\Delta \mathcal{E} = \sum_0^T d\mathcal{E} = \int_0^T u.i dt$$

D'où: $$P = \frac{1}{T} \int_0^T u.i.dt$$

Remplaçons u et i par $u(t) = U_{max} \cos \omega t$ et $i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi)$

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T U_{max} \cos(\omega t + \varphi).dt$$

$$= \frac{U_{max} I_{max}}{T} . \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi).dt$$

Utilisons la relation trigonométrique $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

On pose $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \omega t \\ \frac{a-b}{2} = \omega t + \varphi \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2\omega t + \varphi \\ b = -\varphi \end{cases}$

$$P_m = \frac{U_{max} I_{max}}{2T} . \int_0^T (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(-\varphi)).dt$$

$$= \frac{U_{max} I_{max}}{2T} . \left(\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi).dt + \cos(-\varphi) . \int_0^T dt \right)$$

$$P_m = \frac{U_{max} I_{max}}{2T} . \left(\frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + \varphi)]_0^T + \cos(-\varphi) . [t]_0^T \right)$$

$$= \frac{U_{max} I_{max}}{2T} . \left(\frac{1}{2\omega} (\sin(2\omega T + \varphi) - \sin\varphi) + T . \cos(-\varphi) \right)$$

On a $\omega T = 2\pi$

$$P_m = \frac{U_{max} I_{max}}{2T} . \left(\frac{1}{2\omega} (\sin(4\pi + \varphi) - \sin\varphi) + T . \cos(-\varphi) \right)$$

Or $\sin(4\pi + \varphi) - \sin\varphi = 0$ et $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$

$$P_m = \frac{U_{max} I_{max}}{2T} . \cos\varphi . T = \frac{U_{max} I_{max}}{2} . \cos\varphi = U I . \cos\varphi$$

$$P = U I . \cos\varphi$$

La puissance moyenne est le produit de deux termes:

Scanned with CamScanner

• UI est la puissance apparente. Ce terme s'exprime en volt-ampère, symbole V.A, alors que la puissance moyenne s'exprime en watt.

• $\cos\varphi$ est appelé facteur de puissance.

➔ **Importance du facteur de puissance:**

Dans les réseaux de distribution du courant alternatif sinusoïdal pour un usage d'habitation ou industriel, l'utilisateur exige une certaine valeur de puissance: $P = UI.\cos\varphi$.

- La tension U est constante (220V par exemple).

- Si l'installation de cet usage a un mauvais facteur de puissance ($\cos\varphi$ petit), il faudra, pour obtenir la puissance P fixe, demander au réseau de distribution une intensité I plus grande. Or, les pertes par effet Joule dans les câbles qui amènent le courant à l'usage sont proportionnelles à (I^2); ces pertes se produisent avant le compteur de l'usager et sont donc à la charge de la compagnie de distribution. C'est pour ces raisons que les compagnies imposent un minimum pour les $\cos\varphi$ des installations des usagers $(\cos\varphi > 0,8)$ par exemple et pénalisent l'usager si $\cos\varphi < 0,8$.

➔ **L'énergie électrique consommé par le dipôle RLC:**

- L'énergie électrique émmagasinée dans une bobine idéale (L) et dans un condensateur prend la même valeur après chaque période T.

Par conséquent, la puissance électrique moyenne consommée par chacun de ces dipôles est nulle.

• Cas d'une bobine idéale $(L, r = 0)$

$$P = \frac{\Delta E}{T} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p.dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_L.i.dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} L.\frac{di}{dt}.i.dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} L.i.d$$
$$= \frac{L}{T}[i^2]_t^{t+T} = 0$$

• D'une même manière, on trouve le même résultat dans le cas du condensateur.

- La puissance électrique moyenne consommée par un dipôle RLC est consommée par effet Joule dans le conducteur ohmique du circuit.

- Son expression est : $P = RI^2$

En résumé : $P = UI.\cos\varphi = RI^2$

Exercices

1 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

En régime sinusoïdal forcé:

1- L'impédance d'un dipôle RLC série peut parfois être nulle.

2- Le déphasage de la tension aux bornes d'un dipôle RLC série par rapport à l'intensité peut parfois être nul.

3- L'impédance du dipôle RLC série peut prendre des valeurs plus petites que la résistance du circuit.

4- La largeur de la bande passante diminue:

a- lorsqu'on fait augmenter la tension efficace imposée au dipôle résonant.

b- Lorsqu'on fait augmenter la résistance R.

c- Lorsqu'on fait diminuer la résistance R.

5- Le facteur de qualité de la résonance est lié:

a- aux paramètres R, L et C du circuit.

b- à la tension sinusoïdale imposée.

Solution

1- Faux; 2- Vrai; 3- Faux; 4.a- Faux; 4.b- Vrai; 4.c- Faux; 5.a- Vrai; 5.b- Faux.

2 Dans le montage de la figure ci-contre, le générateur délivre une tension de valeur efficace réglable et de fréquence réglable.

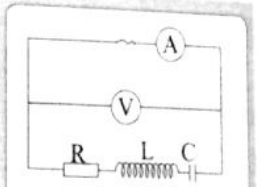


figure-1

L'ampèremètre mesure l'intensité efficace I dans le circuit; le voltmètre mesure la tension efficace U aux bornes du dipôle formé par le conducteur ohmique, la bobine et le condensateur montés en série.

Pour différentes valeurs de U, mesurons I, la fréquence restant constante.

• Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous pour deux valeurs de la fréquence.

Fréquence	$U(V)$	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**
$N_1 = 440Hz$	$I(mA)$	**6,7**	**9,9**	**14,5**	**17**
$N_2 = 680Hz$	$I(mA)$	**19,9**	**30**	**40**	**49**

Ces résultats ont permis d'obtenir les droites de la figure (2).

Scanned with CamScanner

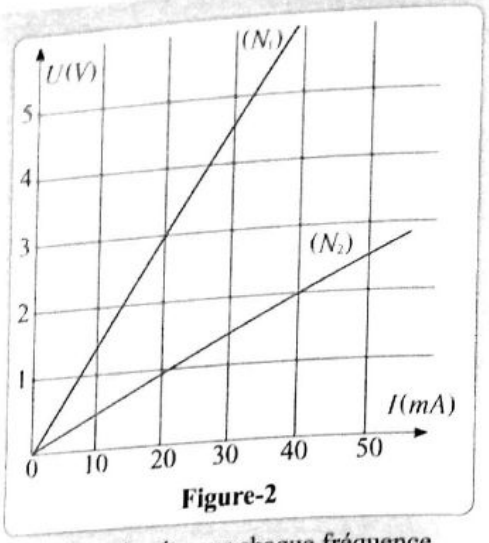


Figure-2

1- Déterminer l'impédance du circuit pour chaque fréquence.

2- Quelle conclusion tirez-vous?

Solution

1- On constante que $U = f(I)$ est une droite linéaire de pente $Z = \frac{U}{I}$.

Pour $N = N_1$ on a:

$Z_1 = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{3}{20.10^{-3}} = 150\Omega$.

Et pour $N = N_2$, on a:

$Z_2 = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{1}{20.10^{-3}} = 50\Omega$.

2- Conclusion: L'impédance d'un dipôle RLC augment lorsque la fréquence du générateur augmente.

3 Un circuit électrique comprend:

- un générateur de signaux basse fréquence $(G.B.F)$ et un oscilloscope bicourbe;
- un conducteur ohmique de résistance $R = 220\Omega$, un condensateur de capacité $C = 22nF$, une bobine d'induction L inconnue et de résistance négligeable devant R.

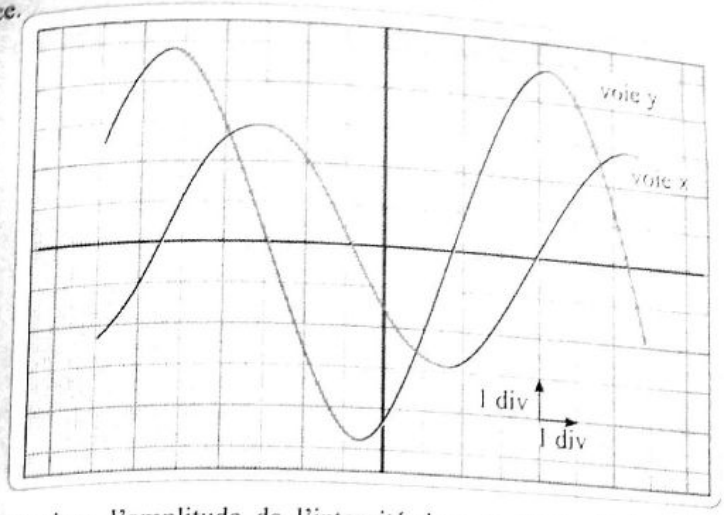
1- Pour une fréquence déterminée, on a obtenu l'oscillogramme du document 1 avec les réglages suivants:

balayage horizontal: $0,1ms.div^{-1}$;

• sensibilité verticale: $1V.div^{-1}$ pour la voie X et $375\,mVdiv^{-1}$ pour la voie Y.

Voie X : tension u_1 aux bornes du dipôle (R,L,C); voie Y : tension u_2 aux bornes du conducteur ohmique R.

1.1- Déterminer l'amplitude de la tension délivrée par le générateur et sa valeur efficace.



1.2- Déterminer l'amplitude de l'intensité dans le dipôle (R,L,C) et sa valeur efficace.

1.3- Calculer l'impédance du dipôle (R,L,C) pour cette fréquence.

1.4- Les deux signaux sont-ils en phase? Conclure.

2- On modifie la fréquence N du générateur tout en maintenant constante l'amplitude de la tension délivrée par le générateur.

Pour $N = 1520Hz$, les deux tensions u_1 et u_2 sont en phase.

2.1- À quoi correspond cette observation?

2.2- En déduire la valeur de l'induction L.

2.3- Calculer, à cette fréquence, l'impédance du dipôle (R,L,C).

Solution

1- Aux bornes du générateur:

$U_m(1) = 2,9V$; or $U_1 = \frac{U_m(1)}{\sqrt{2}} = 2V$.

$U_m(2) = 1,8V$; or $I_m = \frac{U_m(2)}{R}$,

soit $I_m = \frac{1,8}{220}$; $I_m = 8,2mA$; $I = 5,8mA$.

Par définition: $Z = \frac{U_m}{I_m}$,

$Z = \frac{2,9}{8,2.10^{-3}} \approx 354\Omega$.

Les courbes sont décalées: les signaux ne sont pas en phase. Ce n'est pas la résonance d'intensité.

2.1- Lorsque les deux tensions sont en phase, il y a résonance d'intensité, N_0 est la fréquence à la résonance d'intensité.

2.2- $N_0 = \frac{1}{2\pi.\sqrt{L.C}}$, d'où $L = \frac{1}{4\pi^2.CN_0^2}$; $L = 0,5H$.

2.3- À la résonance d'intensité, l'impédance du circuit est égale à R, soit 220Ω.

Scanned with CamScanner

4 Un générateur délivre une tension $u(t) = 10\cos 2\pi Nt$ aux bornes d'un dipôle AB (voir figure)

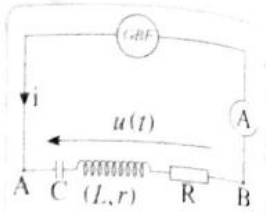
t est en secondes et u en volts.

On donne $L = 0,5H$.

$R = 200\Omega$

L'intensité du courant est $i(t) = 41\cos 1570,8t$.

t en (s) et i en mA.



1- Calculer la fréquence N du générateur.

2- Quelle est l'intensité indiquée par l'ampèremètre?

3- Calculer l'impédance de ce circuit.

4- Ce circuit est-il en état de résonance? Justifier.

5- Déterminer r. (On néglige la résistance de l'ampèremètre).

6- Calculer la puissance moyenne consommée par la dipôle AB.

Solution

1- Valeur de la fréquence:

$i(t)$ et $u(t)$ ont la même fréquence:

$i = 41\cos 1570,8t = I\sqrt{2}.\cos 2\pi Nt$.

$N = \dfrac{1570,8}{2\pi} = 250Hz$.

2- Intensité indiquée:

L'ampèremètre indique la valeur efficace de l'intensité du courant:

$I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{41}{\sqrt{2}} = 29mA$.

3- Impédance du circuit:

$Z = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{10}{410.10^{-3}} = 243,9\Omega$.

4- Etat du circuit:

On remarque $\varphi(i) = \varphi(u) = 0$.

Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ est nul, ce-ci ne se réalise qu'à l'état de résonance.

5- Valeur de r:

à la résonance: $Z = R + r$

$r = Z - R = 44\Omega$.

6- Puissance moyenne:

$P = U.I.\cos\varphi = U.I = \dfrac{U_m.I_m}{2}$.

$P = \dfrac{10.41.10^{-3}}{2} = 205mW$.

5 Un dipôle AB est constitué d'un condensateur de capacité C, d'une bobine de résistance r et d'induction L et d'un conducteur ohmique de résistance $R = 50\Omega$.

À l'aide d'un générateur à basse fréquence on applique une tension sinusoïdale d'expression : $u(t) = U_m.\cos\omega t$.

Un oscilloscope bicourbe a permis de visualer les oscillogrammes représentés sur la figure (2).

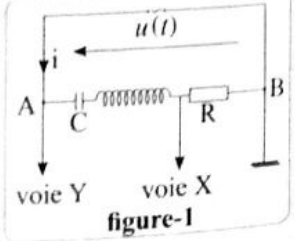


figure-1

1- Quelle est la tension visualisée sur chacune des voies de l'oscilloscope?

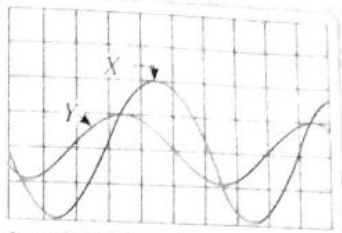
2- Quelle est la nature du courant électrique traversant le circuit? Justifier.

3- Exprimer numériquement la tension $u(t)$ délivrée par le générateur.

4- Laquelle des deux fonctions est en avance de phase par rapport à l'autre $u(t)$ ou $i(t)$? calculer ce déphasage.

5- Exprimer $i(t)$.

6- Quelle est la valeur de l'impédance de ce circuit?



Sensibilité Voie X : 2,5V/div
Verticale Voie Y : 12V/div
Sensibilité horizontale: 1ms/div
Figure-2

Solution

1- Sur la voie X, on visualise la tension $u_R(t)$ aux bornes du conducteur ohmique.

- Sur la voie Y, la tension visualisée est $u_{AB} = u(t)$.

2- La tension u_R est alternative sinusoïdale, il en est de même que l'intensité du courant $i(t)$.

En effet, la loi d'ohm appliquée, en utilisant les valeurs instantanées permet d'écrire: $i(t) = \dfrac{1}{R}u(t)$, les deux fonctions ont donc la même allure à un coefficient multiplicatif près.

3- Expression de la tension $u(t) = U_m\cos\omega t$.

• Valeur maximale:

$U_m = 1div \times 12V/div = 12V$.

• Pulsation:

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{3div.10^{-3}} = \dfrac{2\pi.10^3}{3}\ (rad/s)$.

Alors: $u(t) = 12\cos\dfrac{2\pi}{3}.10^3 t$.

4- La courbe qui présente une avance de phase est celle visualisée sur la voie Y, c'est-à-dire la tension $u(t)$.

$|\Delta\varphi| = \omega.\tau = 2\pi\dfrac{\tau}{T} = 2\pi.\dfrac{1div}{6div} = \dfrac{\pi}{3}\ rad$

5- On a $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\varphi_1 = 0$.

Posons $i(t) = I_m.\cos(\omega t + \varphi)$.

- Le déphasage s'exprime par :

$|\Delta\varphi| = \varphi_1 - \varphi_2 \Longrightarrow \varphi_2 = \varphi_1 - |\Delta\varphi|$

$= 0 - \dfrac{\pi}{3}$

$= -\dfrac{\pi}{3}\ rad$

D'après la loi d'ohm: $I_m = \dfrac{1}{R}U_m(R)$.

$U_m(R) = 2div.2,5V/div = 5V$.

D'où : $I_m = \dfrac{U_m(R)}{R} = \dfrac{5}{50} = 0,1A$.

Alors : $i(t) = 0,1\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}.10^3 t - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

6- L'impédance Z du circuit est:

$Z = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{12}{0,1} = 120\Omega$.

Scanned with CamScanner

6 On réalise le montage de la figure ci-dessous.

Sur l'écran de l'oscilloscope, on a observé les deux courbes visualisant les tensions: $u_1 = u_{AM}$ et $u_2 = u_{MB} = Ri$.

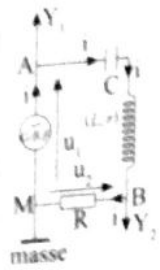


figure-1

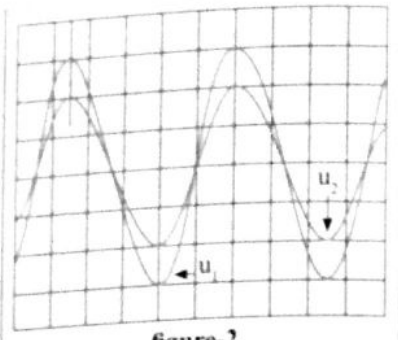


figure-2

1- Dans quel état se trouve le circuit?

Pour quelle fréquence observe-t-on ces oscillogramme?

2- La durée de balayage de l'oscilloscope est de : $50\mu s.div^{-1}$.

Calculer la fréquence de la tension délivrée par le générateur.

3- La capacité du condensateur est égale à $22nF$.

Calculer d'induction L de la bobine.

4- Les deux voies de l'oscilloscope ont la même sensibilité verticale: $200mV.div^{-1}$.

La résistance R est égale à 100Ω.

4.1- Déterminer les tensions maximales U_{1m} et U_{2m}.

4.2- Exprimer r en fonction de U_{1m}, U_{2m} et R. Calculer r.

Solution

1- Ce système se trouve dans un état de résonance, obtenu lorsque la fréquence de l'excitateur (GBF) coïncidé avec la fréquence propre du résonateur (RLC).

2- $T = 4,5div.50\mu s = 225\mu s$.

$N = 4,44KHz$.

3- $N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 N^2 C}$.

$L = \frac{1}{4\pi^2(4,44.10^3)^2.22.10^{-9}} \simeq 58,4mH$.

4.1- $U_{1m} = 3div.200mV.div^{-1} = 0,6V$.

$U_{2m} = 2div.200mV.div^{-1} = 0,4V$.

4.2-

- A la résonance l'impédance du circuit est égale à résistance équivalent $R_e = R + r$.

Alors: $U_1 m = (R + r).I_m$.

- La loi d'ohm permet d'écrire: $I_m = \frac{U_{2m}}{R}$.

D'où: $U_{1max} = (R + r).\frac{U_{2m}}{R}$. $R + r = \frac{U_{1m}}{U_{2m}}R$.

$r = R\left(\frac{U_{1m}}{U_{2m}} - 1\right)$.

$r = 100\left(\frac{0,6}{0,4} - 1\right) = 50\Omega$.

7 Un circuit (R,L,C) comporte en série, un condensateur de capacité C, une bobine de résistance r_0 et d'inductance $L = 11,3mH$ et un conducteur ohmique de résistance r réglable figure (1).

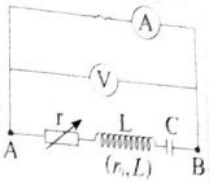


Figure-1

L'ensemble est alimenté par un générateur de basse fréquence, qui délivre une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos 2\pi Nt$, de fréquence variable et de valeur efficace maintenue constante $U = 4,8V$.

On néglige la résistance de l'ampèremètre.

- Dans une première expérience, la résistance r est fixée sur une valeur $r_1 = 123,33\Omega$.

On suit la réponse du dipôle AB en mesurant l'intensité efficace du courant traversant ce dipôle en fonction de la fréquence N du générateur.

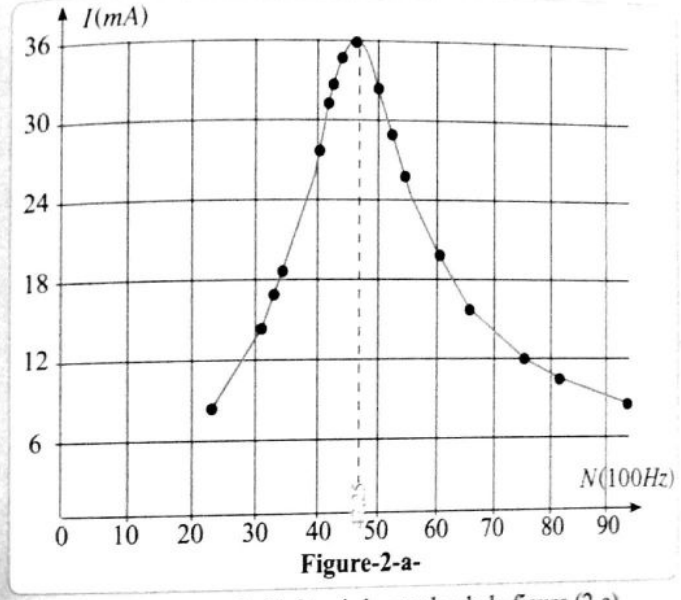


Figure-2-a-

Les résultats obtenus ont permis d'obtenir la courbe de la figure (2-a).

- On refait la même expérience en donnant à la résistance r une valeur r_2; les autres paramètres du circuit ne sont pas modifiés.

Les résultats obtenus dans ce cas sont représentés sur la figure (2-b).

1- Déterminer la valeur de la résistance r_0.

2- Sur quelle valeur a été fixée la résistance r_2?

3- La quelle des deux courbes correspond à une résonance aigue?

Scanned with CamScanner

4- Quelle condition vérifie la fréquence du générateur à la résonance?

5- En déduire la valeur de la capacité C.

6- Les largeurs de bande passante relatives à ces deux expériences sont:

$(\Delta N)_1 = 1725Hz$ et $(\Delta N)_2$.

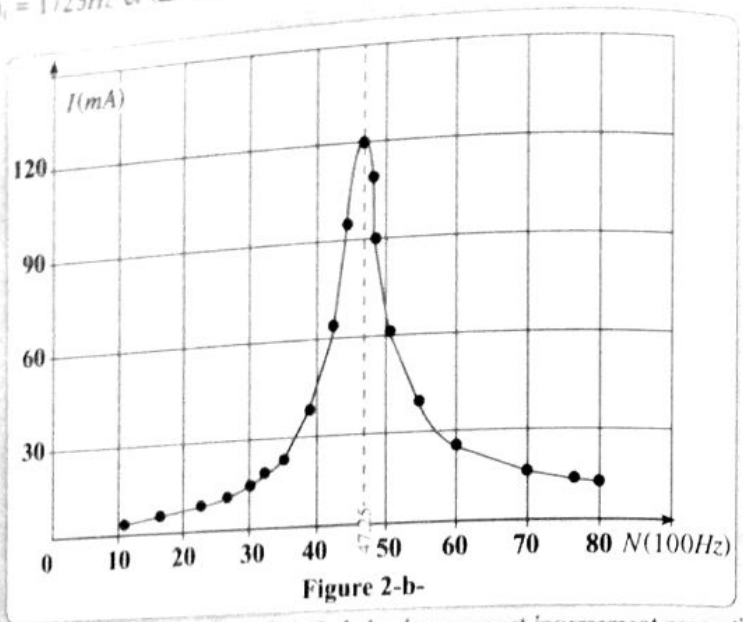


Figure 2-b-

En admettant que le facteur de qualité Q de la résonance est inversement proportionnel à la résistance du circuit.

6.1- Calculer Q_1 facteur de qualité du circuit (1).

6.2- En déduire Q_2 et $(\Delta N)_2$.

Solution

1- Valeur de r_0 :

Dans la première experience nous avons à la résonance:

$$Z_{min} = R_1 = r_1 + r_0 = \frac{U}{I_1}$$

$$\longrightarrow r_0 = \frac{U}{I_1} - r_1$$

$$r_0 = \frac{4,8}{36.10^{-3}} - 123,33$$

$$r_0 = 10\Omega$$

2- Valeur de r_2 :

De la même manière, à la deuxième résonance:

$$R_2 = r_2 + r_0 = \frac{U}{I_2}$$

$$\longrightarrow r_2 = \frac{U}{I_2} - r_0 = \frac{4,8}{0,12} - 10 = 30\Omega$$

3- Courbe correspondant à la résonance aiguë.

La résonance est d'autant plus aiguë que la résistance du circuit est plus faible.

c'est la 2ème courbe qui représente l'acuité de la résonance.

Attention:

Les deux courbes ne sont pas représentées à la même échelle en ordonnées.

4- Condition de la fréquence à la résonance:

À la résonance, la fréquence N du signal imposé $u(t)$ doit être égale à la fréquence propre N_0 des oscillations libres du dipôles RLC.

5- Valeur de C :

La condition précédente permet d'écrire:

$$N = N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi LC}}.$$

D'où:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L.N^2}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2.11,3.10^{-3}(4725)^2} = 10^{-7}F$$

6.1- Calcul de Q_1 :

Le facteur de qualité a pour expression:

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N}.$$

Dans la première expérience:

$$Q_1 = \frac{4725}{1725} \simeq 2,7.$$

6.2- Valeurs de Q_2 et $(\Delta N)_2$:

Puisque le coefficient de qualité est inversement proportionnel à la résistance R du circuit, alors: $Q = \frac{cte}{R}$.

Par conséquent, $Q_1.R_1 = Q_2.R_2$.

D'où: $Q_2 = Q_1.\frac{R_1}{R_2} = 2,7.\frac{133,33}{40} \simeq 9$.

Or: $Q_2 = \frac{N_0}{(\Delta N)_2}$,

d'où: $(\Delta N)_2 = \frac{N_0}{Q_2} = \frac{4725}{9}$.

$$\Delta N_2 \simeq 525Hz.$$

8 Un circuit électrique série comprend:

- Une bobine de coefficient d'inductance $L = 0,40H$ et de résistance $r = 10\Omega$.
- Un condensateur de capacité C.
- Un conducteur ohmique de résistance R.
- Un ampèremètre de résistance négligeable.
- Un générateur de tension alternative sinusoïdale de valeur instantanée $u(t) = 6\sqrt{2}\cos\omega t$ et de fréquence N variable.

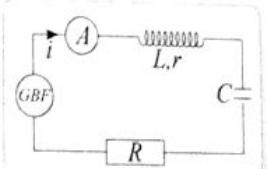


Figure-1

On fait varier la fréquence du générateur et on mesure les valeurs de l'intensité efficace correspondante.

Les résultats obtenus ont permis de tracer le graphe de la figure 2

1- Quel phénomène obtient-on dans ce circuit à la fréquence $1600Hz$

2- En déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

3- Déterminer la résistance R.

4- Exprimer l'intensité $i(t)$ traversant, le circuit, à la résonance.

5- Déterminer le facteur de qualité de la résonance obtenue dans ce circuit.

Scanned with CamScanner

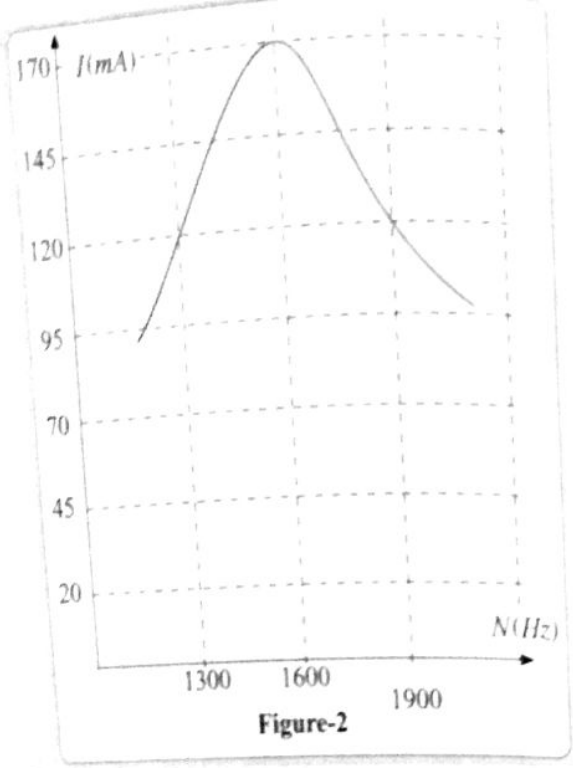


Figure-2

Solution

1- C'est le phénomène de résonance en intensité.

2- Lorsque ce phénomène est atteint, ici à $1600Hz$ les deux fréquences N_0 fréquence propre du dipôle LC et celle du GBF sont égales: $N_0 = N_{GBF}$.

Il en résulte que: $2\pi\sqrt{LC} = T_{GBF} = \frac{1}{N}$.

Alors:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L N^2}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2.0,4.(1600)^2} = 2,47.10^{-6}F$$

3- A la résonance, l'impédance du circuit est minimale et égale à la résistance du circuit.

En utilisant l'expression de l'impédance, on a $Z_{min} = \frac{U}{I_0}$.

$$R + r = \frac{U}{I_0}$$

$$\Longrightarrow R = \frac{U}{I_0} - r$$

$$= \frac{6}{170.10^{-3}} - 10 \simeq 25,3\Omega$$

4- Posons $i = I\sqrt{2}\cos(2\pi Nt + \varphi)$.

À la résonance, $I = I_0 = 170mA$ et le déphasage tension-intensité est nul, donc $\varphi = 0$.

Alors: $i(t) = 0,17\sqrt{2}\cos 3200\pi t$.

5- Graphiquement: $\frac{I_0}{\sqrt{2}} \simeq 120mA$, les deux abscisses correspondantes sont $1300Hz$ et $1900Hz$,alors: $\Delta N = 600Hz$, et: $Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{1600}{600} = 2,66$.

9 Un dipôle RLC est constitué d'un condensateur de capacité C, une bobine de résistance r_0 et d'induction $L = 0,25H$ et un conducteur ohmique de résistance $r = 180\Omega$.

Pour étudier le comportement de ce dipôle, on applique à l'aide d'un générateur de basse fréquence (GBF) entre ses bornes A et B une tension alternative sinusoïdale de valeur instantanée: $u(t) = U\sqrt{2}\cos 2\pi Nt$.

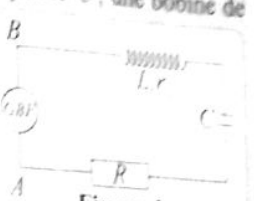


Figure-1

La valeur efficace de cette tension est maintenue constante $U = 24V$ et sa fréquence est réglable, figure (1).

L'intensité instantanée du courant dans ce circuit est:

$i(t) = I\sqrt{2}\cos(2\pi Nt + \varphi)$

Une étude expérimentale a permis de suivre l'impédance Z de circuit en fonction de la fréquence N. Les résultats obtenus ont abouti au diagramme de la figure 2.

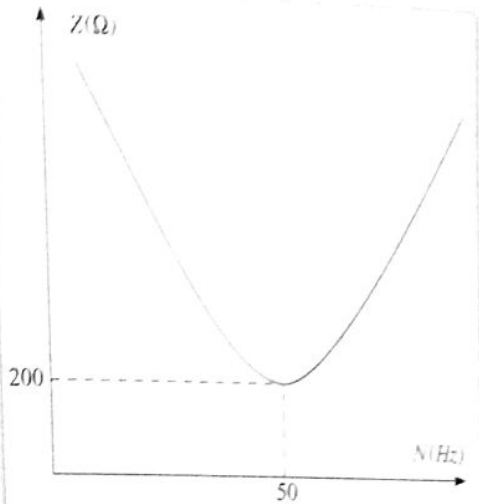


Figure-2

1- Choisir les propositions correctes dans ce qui suit:

1.1- La grandeur qui, à la résonance, prend une valeur maximale est:

a- L'intensité de courant.

b- La tension u_{AB}.

c- La puissance moyenne consommée par le dipôle AB.

1.2- La grandeur qui s'annule à la résonance est:

a- L'impédance du circuit.

b- Le déphasage entre la tension $u_{AB}(t)$ et l'intensité $i(t)$.

1.3- Dans la zone passante de la résonance, l'intensité efficace du courant électrique vérifie la condition :

a- $I \geq I_0\sqrt{2}$; **b-** $I \leq I_0\sqrt{2}$; **c-** $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Scanned with CamScanner

I_0 : intensité efficace du courant à la résonance

2- En exploitant la figure 2

2.1- Déterminer la résistance r.

2.2- Déterminer la capacité C.

2.3- Exprimer l'intensité $i(t)$ lorsque la fréquence N fixée sur $50Hz$.

3- Lorsqu'on fixe la fréquence N sur la valeur $140Hz$, l'impédance du circuit prend le double de la valeur qu'elle prenait à la fréquence $50Hz$ et la puissance moyenne qu'il consomme représente 25% de la puissance moyenne maximale.

Déterminer numériquement l'intensité $i(t)$ sachant qu'elle est en retard de phase sur la tension $u(t)$.

Solution

1- **Propositions correctes:**

1.1- a et c

1.2- b

1.3- c

2.1- Valeur de r.

A la résonance l'impédance du circuit est minimale et égale à la résistance du circuit

$Z_{min} = r_b + r$

Graphiquement $Z_{min} = 200\Omega$

Alors $r_b = Z_{min} - r = 200 - 180 = 20\Omega$

2.2- **Valeur de la capacité** C :

A la résonance la fréquence du générateur est égale à la fréquence propre du dipôle RLC.

En effet, $N = N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

D'ou

$C = \frac{1}{4\pi^2 L N^2}$

$C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 0,25 \cdot (50)^2} = 4.10^{-6} F$

2.3- Expression de $i(t)$ à la résonance

A la fréquence $50Hz$, le circuit est en état de résonance, les deux fonction $i(t)$ et $u(t)$ sont en phase.

$\varphi(i) = \varphi(u)$ alors $\varphi = 0$

$I = I_e = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{r + r_b} = \frac{24}{200} = 0,12A$

Alors:

$i(t) = I_e\sqrt{2}\cos(2\pi N_0 t + \varphi)$

$i(t) = 0,12\sqrt{2}\cos 100\pi t$

ou bien $i(t) \simeq 0,17\cos 314,16t$.

3- Expression de l'intensité à 140 Hertz

Déterminons les valeurs de I et φ.

$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{2R} = \frac{I_0}{2} = \frac{0,12}{2} = 6.10^{-2}A$.

La puissance moyenne consommée à cette fréquence est telle que :

$P = 25\% P_0$, soit en utilisant l'expression de la puissance :

$UI\cos\varphi = \frac{1}{4}P_0 = \frac{1}{4}UI_0$

Et puisque $I = \frac{I_0}{2}$, on écrit

$U\frac{I_0}{2}\cos\varphi = \frac{1}{4}UI_0$

alors: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, ce qui donne:

$\varphi = \pm\frac{\pi}{3}(rad)$

Donc $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(2\pi Nt + \frac{\pi}{3})$

Puisque $u(t) = U\sqrt{2}\cos 2\pi Nt$ et elle est en avance sur $i(t)$, alors $\varphi = \frac{\pi}{3}rad$

d'ou $i(t) = 6,10^{-2}\cos(280\pi t - \frac{\pi}{3})$

10 **Le circuit de la figure (1) comprend:**

- **Un condensateur de capacité** $C = 6,3\mu F$.
- **Une bobine de résistance négligeable et de coefficient d'induction** $L = 36mH$.
- **Un conducteur ohmique de résistance** R **réglable**
- **Un générateur de basse fréquence délivrant une tension alternative sinusoïdale dont la fréquence** N **et la valeur efficace** U **sont réglables.**

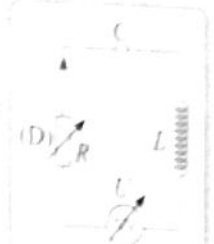


Figure-1

- **On fixe la tension efficace sur la valeur** $U_0 = 10V$ (R **étant fixé sur une valeur déterminée) et on suit les variations de l'intensité efficace en fonction de la fréquence** N **; les résultats obtenus ont permis d'obtenir la courbe** (a) **de la figure (2).**
- **La courbe** (b) **a été obtenue en faisant varier l'un des deux paramètres** R **ou** U.

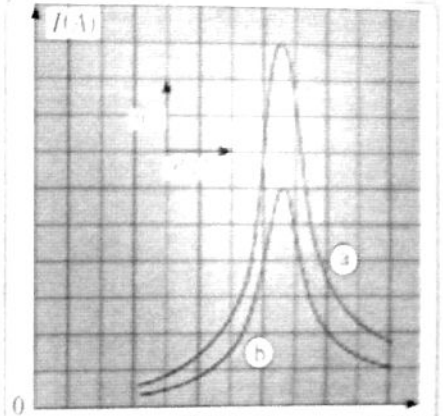


Figure-2

1- Calculer la valeur de R **correspondant à la courbe** (a).

2- Exprimer l'impédance Z **du dipôle** RLC, **en fonction de** R, **lorsque l'intensité efficace prend la valeur** $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

3- Calculer le facteur de qualité relatif à chacune des deux courbes.

4- Lequel des deux paramètres R **et** U, **on a fait varier pour obtenir la courbe** (b)**?**

Scanned with CamScanner

Solution

1- **Valeur de R :**

A la résonance de l'expérience (1) correspondant à la courbe (a) : l'impédance du circuit est égale à la résistance R.

$$R = \frac{U_1}{I_0} = \frac{10}{0,5} = 20\Omega .$$

2- **Expression de Z :**

Par définition:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U}{\frac{I_0}{\sqrt{2}}} = \frac{U}{I_0}.\sqrt{2} = R\sqrt{2}$$

3- **Facteurs de qualité:**

$$Q = \frac{\Delta N_0}{\Delta N}$$

Expérience (a):

$(\Delta N)_a \simeq 57Hz$, $Q_a = 6,67$

Expérience (b) :

$(\Delta N)_b \simeq 57Hz$, $Q_b = 6,67$

$N_0 = N_0 4 = 381Hz$

4- **Paramètre ayant varié:**

Puisque les deux résonances ont la valeur du facteur de qualité et que ce facteur dépend uniquement des paramètres R, L ou C, alors le facteur.

- Si R a varié ou aurait dû avoir $Q_b \neq Q_a$.
- Donc, c'est la tension efficace U qui a varié.

11 On réalise le montage de la figure (1), constitué par:

- Un générateur GBF délivrant une tension alternative sinusoïdale $u_{AB}(t) = U_m.\cos(2.\pi.N.t)$.
- Un conducteur ohmique de résistance $R = 20\Omega$.
- Un condensateur de capacité C réglable.
- Une bobine de coefficient d'induction L et de résistance $r_b = 8,3\Omega$.
- Un voltmètre.

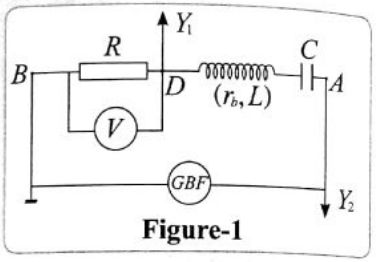


Figure-1

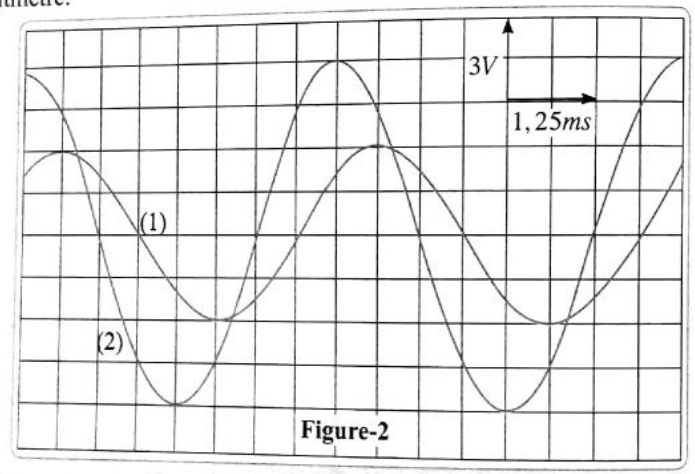


Figure-2

1- On fixe la capacité C sur la valeur C_1 et on visualise sur un oscilloscope, la tension $u_R(t)$ sur la voie Y_1 et la tension $u_{AB}(t)$ sur la voie Y_2, les courbes obtenues sont présentées sur la figure (2).

1.1- Parmi ces deux courbes; identifier celle qui représente la tension $u_R(t)$.

1.2- Déterminer l'impédance Z du circuit.

1.3- Donner l'expression numérique de l'intensité du courant $i(t)$ passant dans ce circuit.

2- On fixe maintenant la valeur de la capacité C sur la valeur $C_2 = 10\mu F$, le voltmètre indique la valeur $U_{DB} = 3V$.

2.1- Montrer que le circuit est en résonance électrique.

2.2- Déterminer la valeur de L.

Solution

1.1- Identification de la tension $u_R(t)$:

- Remarquons tout d'abord que les deux tensions sont visualisées à la même sensibilité verticale.
- La résistance R est toujours inférieure ou égale à l'impédance Z du circuit.

alors: $RI_m < Z.I_m$.

c'est-a-dire:

$U_R(\max) < U_{AB}(\max) = U_m$.

La tension (1) correspond donc à $u_R(t)$.

1.2- Valeur de Z :

D'après la définition de Z on a:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{\frac{U_R(\max)}{R}} = R.\frac{U_m}{U_R(\max)}$$

$$Z = 20.\frac{6}{3} = 40\Omega$$

1.3- Expression de $i(t)$:

On a $U_{AB}(t) = U_m \cos \omega t$, posons donc:

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

- On a: $I_m = \frac{U_R(\max)}{R} = \frac{3}{20} = 0,15A$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4.1,25.10^{-3}} = 400\pi\,(rad/s).$$

La tension $u_{AB}(t)$ est en avance de phase sur la tension $u_R(t)$ et évidemment sur l'intensité $i(t)$.

La valeur absolue de ce déphasage est:

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi.\tau}{T} = 2\pi.\frac{0,5.1,25}{4.1,25} = \frac{\pi}{4}rad.$$

or: $\varphi(u) > \varphi(i)$, donc:

$$|\Delta\varphi| = \varphi(u) - \varphi(i) = 0 - \varphi.$$

d'où: $\varphi = -|\Delta\varphi| = -\frac{\pi}{4}rad$.

L'expression de $i(t)$ est:

$$i(t) = 0,15\cos\left(400\pi t - \frac{\pi}{4}\right).$$

2.1- Etat du circuit:

- La résistance équivalente du circuit est $R_e = R + R_b = 20 + 8,3 = 28,3\Omega$.
- Cherchons la nouvelle valeur de l'impédance:

$$Z = \frac{U}{I}\frac{U_m}{\sqrt{2}}.\frac{1}{I} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\frac{U_{DB}}{R}} = \frac{U_m.R}{U_{DB}.\sqrt{2}}.$$

Scanned with CamScanner

$Z = \frac{6.20}{3.\sqrt{2}} = 28,28 = 28,3\Omega$.

On a alors $Z = Re$, le circuit est donc en état de résonance.

2.2- Valeur de L:

A la résonance; les paramètres L et C du circuit vérifient la condition:

$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega$ (du GBF).

donc:

$L = \frac{1}{C.\omega^2} = \frac{1}{10.10^{-6}(400\pi)^2} = 6,3.10^{-2} H$.

12 Un dipôle AB dont les éléments sont montés en série comprend:

- Une bobine de résistance r et de coefficient d'induction L;
- Un conducteur ohmique de résistance $R = 45\Omega$;
- Un condensateur de capacité réglable C.

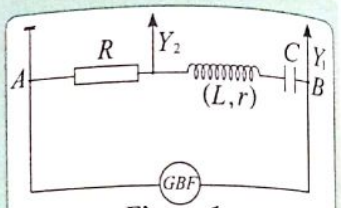


Figure-1

- A l'aide d'un générateur à basse fréquence, on applique entre A et B une tension alternative sinusoïdale de valeur instantanée: $u(t) = U_m.\cos(2\pi N.t)$, U_m et φ sont maintenus constants.

Le courant passant dans le circuit a pour intensité: $i(t) = I\sqrt{2}\cos(2\pi N_0 t + \varphi)$.

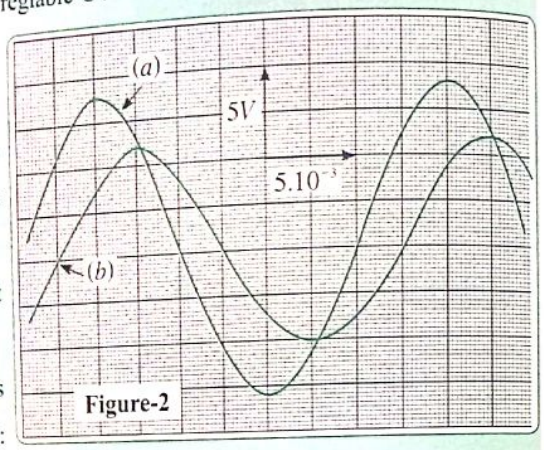


Figure-2

1- On fixe la valeur de C sur une certaine valeur C_1 et on visualise sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe; les deux tensions $u(t)$ et $u_R(t)$. (figure 2).

1.1- Justifier que la courbe (a) représente la tension $u(t)$.

1.2- En utilisant la figure 2; déterminer la valeur des grandeurs U_m, N et $|\varphi|$.

1.3- Donner les expressions numériques de $u(t)$ et $i(t)$.

2- On fait varier maintenant la capacité C et on note les valeurs de I correspondantes, les résultats obtenus ont permis d'obtenir la courbe de la figure 3.

2.1- Quel phénomène met en évidence cette courbe?

2.2- En exploitant cette courbe, déterminer r et L.

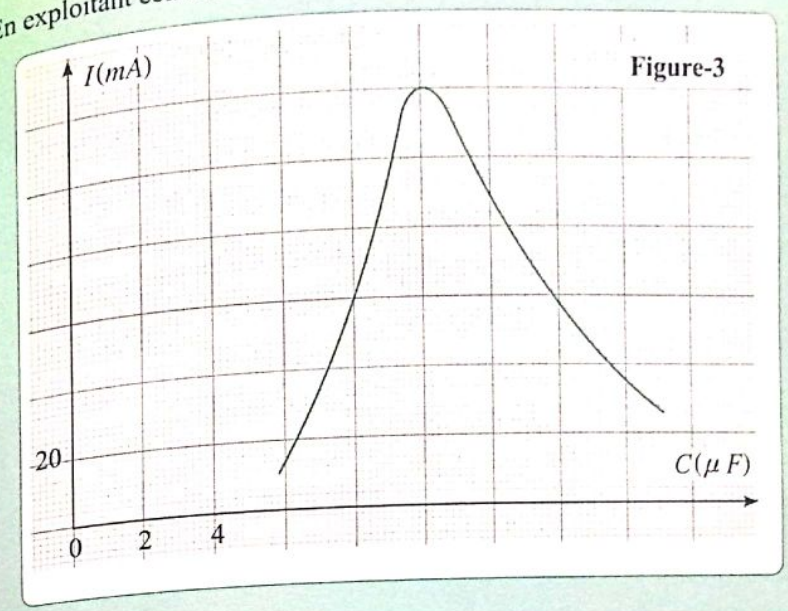


Figure-3

Solution

1.1- Justification de la courbe de $u(t)$:

Les deux courbes sont représentées à la même échelle.

On constate que: $U_{max}(a) > U_m(b)$.

C'est-à-dire: $Z_{(a)}.I_m > Z_{(b)}.I_m$.

Donc: $Z_{(a)} > Z_{(b)}$.

On sait que l'une de ces deux impédances est celle de AB et l'autre est celle de R.

Et, puisque $Z \geq R$.

On déduit que: $(a) \longrightarrow u(t)$ et $b \longrightarrow u_R(t)$.

1.2- Valeurs des grandeurs:

$U_m = 1,7.5 = 8,5V$.

$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{4.5.10^{-3}} = 50Hz$.

$|\varphi| = 2\pi.\frac{\tau}{T} = 2\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} rad$.

1.3- Expressions de $u(t)$ et $i(t)$:

$i(t) = U_m.\cos 2\pi Nt = 8,5.\cos 100\pi t$.

$i(t) = I_m\cos(2\pi Nt + \varphi)$

$i(t) = \frac{U_m(R)}{R}.\cos(2\pi Nt + \varphi)$

$I_m = \frac{U_m(R)}{R} = \frac{1,1.5}{55} = 0,1A$.

La tension $u(t)$ est en avance de phase sur l'intensité $i(t)$; alors: $\varphi(i) < \varphi(u)$.

$|\varphi| = \varphi(u) - \varphi(i) = 0 - \varphi$.

d'où: $\varphi = -|\varphi| = -\frac{\pi}{4} rad$.

Scanned with CamScanner

L'expression de $i(t)$ est donc:

$i(t) = 0,1\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

ou bien $i(t) = 0,1\cos(314t - 0,78)$.

2.1- Phénomène observé:

L'intensité efficace traduit la réponse du dipôle RLC aux excitations du GBF.

Lorsque cette réponse est maximale, le circuit est le siège d'une résonance en intensité.

2.2- Valeur de L et r:

- A la résonance:

$N_{(car)} = N_{(osc)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

- La valeur de C à la résonance est $C_0 = 10\mu F$.

- N étant constante: $50Hz$.

D'où:

$L = \frac{1}{4\pi^2 C_0 N^2} = \frac{1}{4\pi^2 .10^{-5}.(50)^2} \simeq 1H$

A la résonance : $Z = Z_{min} = R + r = \frac{U}{I_0}$.

$I_0 = 120mA$; donc:

$r = \frac{U}{I_0} - R = \frac{8,5}{0,12} - 55 \simeq 16\Omega$.

Chimie

Scanned with CamScanner

1 CINETIQUE CHIMIQUE

I- Transformations chimiques rapides, transformations chimiques lentes

1 Transformations lentes et rapides

La cinétique chimique est l'étude du déroulement temporel des réactions chimiques.

La transformation d'un système chimique est dite:

- instantanee si l'évolution du système est si rapide que la réaction semble achevée à l'instant même où les réactifs entrent en contact.

Dans ce cas, ou ne peut pas suivre l'évolution de la transformation à l'oeil nu ou par la mesure des grandeurs liées à la quantité de matière: concentration, pression, conductivité.....

- lente lorsque l'évolution du système dure de quelques secondes à plusieurs minutes, voire plusieurs dizaines de minutes.

Dans ce cas, on peut suivre l'évolution de la transformation à l'oeil ou par la mesure des grandeurs physiques liées à la quantité de matière.

2 Exemples.

A la température ordinaire:

- Les réaction acido-basiques sont instantanées;
- Les réactions rédox sont souvent lentes.

3 Facteurs cinétiques

Les grandeurs qui agissent sur la vitesse d'évolution d'un système chimique sont appelées des facteurs cinétiques. Les principaux facteurs cinétiques sont décrits ci-dessous.

- Les concentrations en réactifs

La vitesse d'évolution d'un système chimique est d'autant plus grande que les concentrations en réactifs sont plus importantes. En général, cette vitesse est indépendante des concentrations en produits de la réaction.

- La température

La vitesse d'évolution d'un système chimique augmente quand la température augmente.

II- Suivi temporel d'une transformation chimique

1 Méthodes de suivi temporel d'une transformation chimique.

1.1- Méthode chimique: dosage

Dans certaines transformations, l'un des réactifs ou l'un des produits peut être dosé ; à différents instants au cours de la transformation: par dosage acido-basique ou par dosage d'oxydo-réduction.

1-2- Méthodes physiques.

Le suivi de l'évolution de la transformation peut se faire par mesure de certaines grandeurs physiques telles que:

- La pression d'un gaz réactif ou produit de la transformation
- Le volume d'un gaz
- La conductance ou la conductivité du mélange réactionnel dans le cas des solutions ioniques.

2 Vitesse volumique d'une transformation.

2.1- Définition

La vitesse volumique v, à la date t d'une réaction se déroulant dans un volume constant V, est la valeur, à la date t de la dérivée temporelle (c'est-à-dire par rapport au temps) de l'avancement de la réaction, divisée par le volume V :

$$v(t) = \frac{1}{V}\left(\frac{dx}{dt}\right)_t$$

2.2- Unité de v.

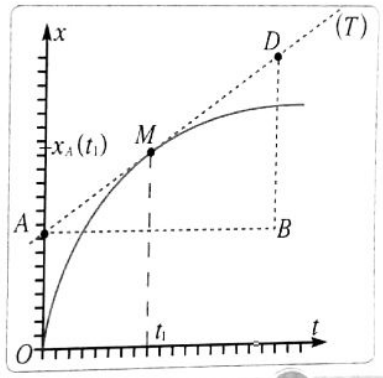
La vitesse volumique de réaction est égale au quotient d'une quantité de matière par le produit d'un volume et d'un temps; on l'exprime en *mol* par litre et par seconde ($mol.L^{-1}.s^{-1}$) ou encore en $mol.L^{-1}min^{-1}$ ou $mol.L^{-1}.h^{-1}$, selon la durée d'évolution du système étudié.

2.3- Détermination graphique d'une vitesse volumique

La dérivée $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ est égale au coefficient directeur (pente) de la tangente (T) à la courbe de la fonction

$x = f(t)$ à la date t_1.

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_1} = \frac{BD}{AB}$



Scanned with CamScanner

3 Expression de la vitesse de réaction en fonction de grandeurs liées à la quantité de matière

La vitesse volumique peut s'exprimer en fonction des grandeurs utilisées pour suivre l'évolution temporelle de la transformation.

Parmi ces grandeurs, on peut citer la concentration, la pression ou le volume gazeux d'un réactif ou produit de la réaction, la conductance ou la conductivité de la solution, etc.

Exemple: Vitesse volumique en fonction d'une concentration

Si on considère la transformation chimique modélisée par l'équation:

$$aA_{(aq)} + bB_{(aq)} \longrightarrow cC_{(aq)} + dD_{(aq)}$$

Le tableau d'avancement de cette transformation permet d'obtenir un état intermédiaire correspondant à la date t : $n(A) = n_0(A) - ax$

$n(A)$ et x peuvent être considérés comme des fonctions de la variable t. Et, $n_0(A)$ et réécriture sont des nombres fixes.

En dérivant cette expression; on obtient:

$$\frac{dn(A)}{dt} = 0 - a.\frac{dx}{dt} = -a.\frac{dx}{dt} \quad ; \quad [A] = \frac{n(A)}{V}$$

d'où: $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a}.\frac{dn(A)}{dt} = -\frac{1}{a}([A].V) = -\frac{V}{a}d\frac{[A]}{dt}$

Le volume V du mélange réactionnel est considéré constant.

En revenant à la définition de la vitesse volumique; on obtient:

$$v = \frac{1}{V}.\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{V}.\left(-\frac{v}{a}.\frac{d[A]}{dt}\right) = -\frac{1}{a}.\frac{d[A]}{dt}$$

Pour le produit C on obtient:

$$v = \frac{1}{c}.\frac{d[c]}{dt}$$

Exemple: $Mg_{(s)} + 2H_3O^+_{(aq)} \longrightarrow Mg^{2+}_{(aq)} + H_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$

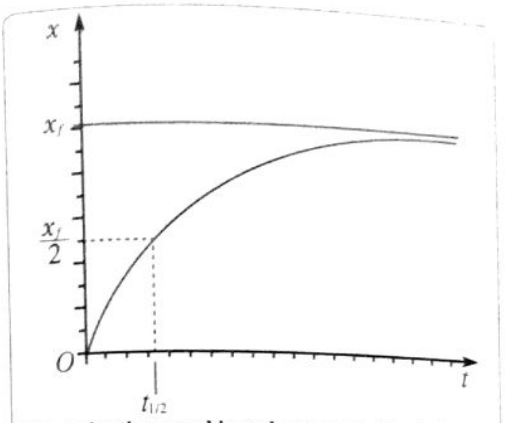
Les espèces aqueuse sont H_3O^+ et Mg^{2+}

$$v = \frac{1}{V}.\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d[H_3O^+]}{dt} = \frac{d[Mg^{2+}]}{dt}$$

4 Temps de demi-réaction

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est la durée nécessaire pour que l'avancement parvienne à la moitié de sa valeur finale (doc.1).

Dans un système caractérisé par un temps de demi-réaction $t_{1/2}$, l'évolution est quasi terminée au bout d'une durée de l'ordre de quelques $t_{1/2}$.



Détermination graphique du temps de demi-réaction

5 Interprétation microscopique des facteurs cinétiques

- Influence des concentrations en réactifs

Le nombre des chocs, par unité de temps et de volume, entre les molécules de deux espèces, diminue quand les concentrations de ces espèces diminuent. C'est la raison pour laquelle la vitesse des réactions chimiques décroît au fur et à mesure de leur avancement.

- Influence de la température

Le nombre des chocs intermoléculaires par unité de temps et de volume et leur efficacité augmentent quand la température croît. C'est la raison pour laquelle la vitesse d'évolution d'un système chimique croît avec la température.

Scanned with CamScanner

1 Test de connaissances

1- Répondre pour «Vrai» ou «Faux»

Lorsqu'une réaction chimique démarre; alors sa vitesse initiale est:

a- nulle

b- non nulle

c- maximale

2- On considère la réaction chimique modélisée par l'équation:

$$2A_{(aq)} + B_{(aq)} \longrightarrow 3C_{(aq)}$$

Compléter les expressions suivantes de la vitesse volumique:

$$v(t) = \ldots \frac{dx}{dt} = \ldots \frac{d[B]}{dt} = \ldots \frac{d[C]}{dt}$$

3- Répondre par «Vrai» ou «Faux»

a- La température est un facteur cinétique

b- La concentration des réactifs est un facteur cinétique.

c- La température et la concentration des réactifs sont les seuls facteurs cinétiques.

Solution

1-a (Faux)

1-b (Faux)

1-c (Faux)

2- $v(t) = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{3}\frac{d[C]}{dt}$

3-a (Vrai)

3-b (Vrai)

3-c (Faux)

2 Le cuivre métallique est attaqué par les ions ferriques Fe^{3+} en milieu aqueux, il se forme des ions cuivriques cu^{2+} et des ions ferreux Fe^{2+}.

1- Etablir l'équation de cette réaction.

2- En déduire les symboles des deux couples intervenant dans cette transformation.

3- On réalise quatre expériences en faisant réagir des solutions concentrées de chlorure de fer (III) sur du métal cuivre en excès.

Les courbes $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ et (δ) représentent $[Cu^{2+}] = f(t)$ dans quatre systèmes, notés (I), (II), (III),

et (IV):

(I) $[Fe^{3+}]_0 = 0,50 mol.L^{-1}; \theta = 20°C$

(II) $[Fe^{3+}]_0 = 1,00 mol.L^{-1}; \theta = 25°C$

(II) $[Fe^{3+}]_0 = 0,50 mol.L^{-1}; \theta = 35°C$

(IV) $[Fe^{3+}]_0 = 1,00 mol.L^{-1}; \theta = 35°C$

Le volume du mélange est constant

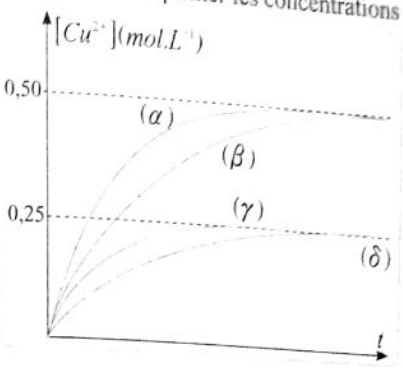
3.1- Quels sont les facteurs cinétiques de cette réaction?

3.2- Etablir un tableau d'avancement de cette réaction et exprimer les concentrations en fonction de l'avancement x à une date t.

3.3- On mesure $[Cu^{2+}] = f(t)$. Comment peut-on en déduire la vitesse volumique de réaction v?

Exprimer la vitesse volumique en fonction de $[Cu^{2+}]$.

3.4- En justifiant la réponse, associer à chaque système, la courbe ci-contre qui lui correspond.



Solution

1- $2Fe^{3+}_{(aq)} + Cu_{(s)} \longrightarrow 2Fe^{2+}_{(aq)} + Cu^{2+}_{(aq)}$

2- D'après cette équation, on déduit que:

$cu \longrightarrow cu^{2+} + 2e^-$; couple ox/red : Cu^{2+}/cu

$Fe^{3} + e^- \longrightarrow Fe^{2+}$; couple $ox/red : Fe^{3+}/Fe^{2+}$

3.1- Les facteurs cinétiques de cette réaction sont la concentration en ions Fe^{3+} et la température.

3.2-

Equation	$2Fe^{3+}(aq) + Cu(s) \longrightarrow 2Fe^{2+}(aq) + Cu^{2+}(aq)$			
Quantité de matière à $t = 0$.	$n(Fe^{3+})_0$	**Solide en excès**	0	0
Quantité de matière à $t > 0$.	$n(Fe^{3+})_0 - 2x$	**Solide en excès**	$2x$	x

- A la date t : $n(Fe^{3+}) = n_0(Fe^{3+}) - 2x$

alors: $[Fe^{3+}] = \frac{n(Fe^{3+})}{V} = \frac{n_0(Fe^{3+})}{V} - \frac{2x}{V} = [Fe^{3+}]_0 - \frac{2x}{V}$

- De la même manière pour les produits:

$$[Fe^{2+}] = \frac{n(Fe^{2+})}{V} = \frac{2x}{V}$$

$$[Cu^{2+}] = n\frac{(Cu^{2+})}{V} = \frac{x}{V}$$

3.3- La vitesse volumique de la réaction a pour expression, à une date t:

$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$.

Scanned with CamScanner

Puisque V est constant, on peut écrire:

$$\frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{V}\right) = \frac{d}{dt}([Cu^{2+}])$$

alors $v = \frac{d[Cu^{2+}]}{dt}$

On peut donc déduire les valeurs de la vitesse v à partir de la courbe de $[Cu^{2+}] = f(t)$ en traçant la tangente à cette courbe.

3.4- Dans les quatre systèmes, l'ion fer (III) réactif limitant. $x_f = \frac{[Fe^{3+}]_0 V}{2}$

Ceci permet d'associer les courbes $(\alpha;\beta)$ aux systèmes $(II;IV)$ tandis les courbes $(\gamma;\delta)$ correspondent aux système $(I;III)$

Les systèmes (I) et (III) ont la même composition initiale: la vitesse initiale est d'autant plus grande que la température est élevée. On peut donc associer la courbe (δ) au système (I) et la courbe (γ) au système (III) (voir les courbes ci-dessous).

Et, de la manière on associe la courbe (α) au système II et la courbe (β) au système IV dont la température est plus faible.

3 On réalise la transformation entre l'eau oxygénée H_2O_2 et les ions iodure I^-; conduisant à la formation du diode I_2.

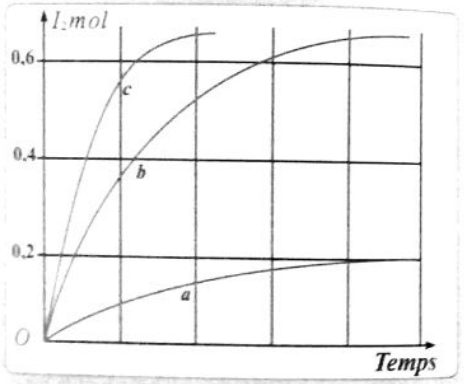
Les couples *ox/red* intervenant dans cette transformation sont: I_2/I^- et H_2O_2/H_2O.

1- Ecrire l'équation de l'oxydation et celle de la réduction. En déduire l'équation bilan de la réaction étudiée.

2- On réalise cette transformation dans diverses conditions de concentration de l'un des réactifs et de température. Les modes opératoires sont regroupés dans le tableau suivant:

N° de l'expérience	1	2	3
Concentration	C_1	C_1	$C_2 < C_1$
Température θ	θ_1	$\theta_2 > \theta_1$	θ_1

La figure ci-contre représente les courbes de l'évolution de la quantité de matière du diode formé dans chaque cas.



2.1- Laquelle de ces expériences conduit à la transformation la plus rapide? justifier et lui attribuer sa courbe correspondante

2.2- Laquelle de ces expériences conduit à la transformation la plus lente? justifier et lui attribuer sa courbe correspondante.

2.3- Compléter les correspondances en associant la courbe restante à l'expérience qui lui convient.

2.4- Ces manipulations ont-elles une conséquence sur le temps de demi-réaction? comment?

Solution

1- Les réactifs sont: I^- et H_2O_2

- Oxydation: $2I^- \longrightarrow I_2 + 2e^-$
- Réduction: $H_2O_2 + 2H^+ + 2e^- \longrightarrow 2H_2O$
- Equation bilan:

$2I^- + H_2O_2 + 2H^+ \longrightarrow I_2 + 2H_2O$

2.1- La réaction est plus rapide dans l'expérience qui associe la concentration et la température les plus élevées, il s'agit donc de l'expérience (2). La courbe qui lui est donc associée est (C).

2.2- La réaction la plus lente a eu lieu dans l'expérience où la concentration est la plus faible: expérience (3) et on lui associe la courbe (a).

2.3- La courbe (b) correspond à l'expérience (1).

2.4- Le temps de demi-réaction est influencé par les facteurs cinétiques.

La valeur de $t_{\frac{1}{2}}$ la plus faible correspond à la réaction la plus rapide.

4 On réalise l'étude cinétique de la transformation des ions peroxodisulfate par les ions iodure. Le mélange réactionnel est réalisé avec un volume $V_1 = 25,0mL$ de solution de peroxodisulfate de potassium de concentration molaire en soluté apporté $C_1 = 5,00mmol.L^{-1}$ et un volume V_2 de solution d'iodure de potassium de concentration molaire en soluté apporté $C_2 = 0,250mol.L^{-1}$, de sorte que l'un des réactifs soit en large excès.

L'équation bilan de la réaction s'écrit: $S_2O_{8(aq)}^{2-} + 2I_{(aq)}^- \longrightarrow 2SO_{4(aq)}^{2-} + I_{2(aq)}$

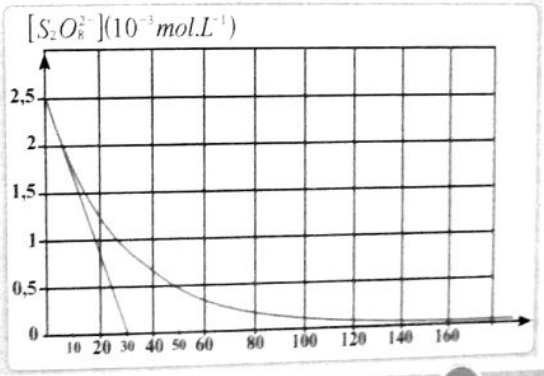
Un graphe indiquant la variation de la concentration molaire en ions peroxodisulfate en fonction du temps a été tracé.

1-Parmi les réactifs, indiquer l'oxydant et le réducteur.

2- Déterminer le réactif limitant.

3- Déterminer le volume V_2 de la solution d'iodure de potassium utilisée dans cette expérience.

4- Déterminer le temps de



Scanned with CamScanner

demi-réaction.

5- Déterminer la vitesse de la réaction à l'instant $t = 0$.

6- Comment varie la vitesse de réaction au cours du temps? Quel est le facteur cinétique?

Solution

1- I^- subit l'oxydation; c'est un réducteur. L'ion peroxosufate $S_2O_8^{2-}$ subit la réduction; c'est un oxydant.

2- Sachant qu'il n'y a qu'un réactif limitant, l'autre réactif étant introduit en large excès et remarquant que $[S_2O_8^{2-}]$ tend vers 0 à la fin de la réaction, il en résulte que le réactif limitant est l'ion $S_2O_8^{2-}$.

3- La courbe permet de tirer la concentration initiale de $S_2O_8^{2-}$ dans le mélange.

On a: $[S_2O_8^{2-}]_i = \frac{(n_{S_2O_8^{2-}})}{V_1+V_2} = \frac{C_1V_1}{V_1+V_2}$;

d'où: $V_1+V_2 = \frac{C_1V_1}{[S_2O_8^{2-}]_i}$

Soit: $V_2 = V_1\left(\frac{C_1}{[S_2O_8^{2-}]_i} - 1\right)$

d'où:

$V_2 = 25mL\left(\frac{5,00.10^{-3}}{2,5.10^{-3}} - 1\right) = 25mL$

4- Un tableau descriptif donne à une date t:

$n(S_2O_8^{2-}) = n_i(S_2O_8^{2-}) - x$

$[S_2O_8^{2-}] = [S_2O_8^{2-}]_i - \frac{x}{V}$

à $t = t_{\frac{1}{2}}$; on $x = \frac{x_{max}}{2} = \frac{n_i(S_2O_8^{2-})}{2}$; d'où:

$[S_2O_8^{2-}]_{\frac{1}{2}} = [S_2O_8^{2-}]_i - \frac{n_i(S_2O_8^{2-})}{2V} = \frac{1}{2}[S_2O_8^{2-}]$

On lit $\frac{ts}{2} \simeq 18\,\text{min}$

5- On a l'expression:

$n[S_2O_8^{2-}] = n_i[S_2O_8^{2-}] - \frac{x}{V}$;

La dérivée donne: $\frac{d}{dt}[S_2O_8^{2-}] = 0 - \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$;

alors: $v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}[S_2O_8^{2-}]$; a $t = 0$:

$v_0 = -\left(\frac{d}{dt}[S_2O_8^{2-}]\right)_0 = -\frac{(-2,5.10^{-3})}{30}$

$= 8,3.10^{-5} mol.L^{-1}.mn^{-1}$

6- La vitesse de la réaction est maximale au début, diminue progressivement et s'annule lorsque la réaction s'arrête.

Le facteur cinétique à l'origine de cette diminution est la concentration des réactifs qui diminue à cause de leur disparition.

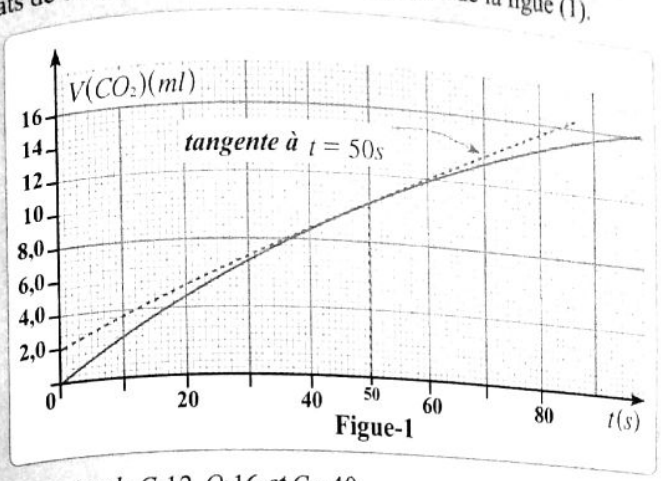
5 On verse dans un récipient un volume $V_s = 50mL$ d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique $(H_3O^+_{(aq)} + c\ell^-_{(aq)})$ de concentration $C = 4.10^{-2} mol.L^{-1}$. Et, on y introduit une masse $m = 120mg$ de cristaux de carbonate de sodium. Une réaction chimique se déclenche. On la modélise par l'équation bilan suivante:

$$CaCO_{3(s)} + 2H_3O^+_{(aq)} \longrightarrow Ca^{2+}_{(aq)} + CO_{2(g)} + 3H_2O_{(\ell)}$$

Partie 1: On mesure le volume du dioxyde de carbone formé, à pression et à température constantes, dans ces conditions le volume molaire gazeux est:

$V_m = 24L.mol^{-1}$

Le résultats de ces mesures ont conduit à l'obtention de la figue (1).



Figue-1

On donne en *g/mol*: *C*:12, *O*:16 ***et*** *Ca*:40.

1.1- Réaliser le tableau d'avancement de cette transformation. Déterminer l'avancement maximal x_{max}.

1.2- Exprimer la vitesse volumique de cette réaction en fonction de V_s, V_m et $V(CO_2)$ volume du gaz formé.

1.3- Déterminer cette vitesse à la date $t = 50s$.

Partie 2: Au cours de cette transformation on a pu également suivre les variations de la concentration des ions oxonium H_3O^+ restants à chaque instant.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant:

$t(s)$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$[H_3O^+]mol.L^{-1}$	0,036	0,032	0,028	0,025	0,023	0,020	0,018	0,017	0,015

2.1- Exprimer la vitesse volumique de la réaction en fonction de $[H_3O^+]$.

2.2- Peut-on déterminer la vitesse de la réaction à partir du tableau de mesures précèdent? justifier.

2.3- Exprimer la concentration molaire $[H_3O^+]$ dans le mélange réactionnel, à une date t; en fonction de $V(CO_2)$ à la même date, V_s, V_m et C.

2.4- Calculer la concentration $[H_3O^+]$ au temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$.

2.5- En déduire la valeur de $t_{\frac{1}{2}}$.

Scanned with CamScanner

Solution

1- Partie I

1.1- Calculons les quantités initiales de réactifs:

$$n_1 = n_{CaCO_3} = \frac{m}{M}$$

$$= \frac{120.10^{-3}}{100} = 1,2.10^{-3}mol$$

$$n_2 = n_{H_3O^+} = [H_3O^+]V_s$$

$$= CV_s = 4.10^{-2}.50.10^{-3}$$

$$= 2.10^{-3}mol$$

	$CaCO_{3(s)} + 2H_3O^+_{(aq)} \longrightarrow Ca^{2+}_{(aq)} + CO_2(g) + H_2O_{(l)}$					
à $t=0$	n_1	n_2		0	0	excès
à t	$n_1 - x$	$n_2 - 2x$		x	x	excès
à la fin réaction	$n_1 - x_{max}$	$n_2 - 2x_{max}$		x_{max}	x_{max}	excès

$$x_{max} = \frac{n_2}{2} = 1.10^{-3}mol$$

1.2- $v = \frac{1}{V_s}\frac{dx}{dt}$, or $x = n(Co_2)$

$$= \frac{v(Co_2)}{V_m}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{V_m}\frac{dv(Co_2)}{dt}$$

donc: $v = \frac{1}{V_s.V_m}\cdot\frac{dV(Co_2)}{dt}$

1.3- La pente de la tangente à la courbe est égale à la dérivée $\frac{dV(Co_2)}{dt}$.

$$\frac{dV(Co_2)}{dt} = \frac{8,0-2,0}{40-0}$$

$$= 0,15mL/s$$

$$= 1,5.10^{-4}L/s$$

alors: $v(t=50s) = \frac{1}{V_s.V_m}\frac{dv(Co_2)}{dt}$

$$= \frac{1,5.10^{-4}}{50.10^{-3}.24}$$

$$= 1,25.10^{-4}mol.L^{-1}s^{-1}$$

Partie 2:

2.1- Le tableau d'avancement permet d'écrire à la date t:

$$[H_3O^+] = \frac{n(H_3O^+)}{V_s} = \frac{n_2 - 2x}{V_s}$$

$$= C - \frac{2}{V_s}x$$

où C et V_s sont constants:

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{d[H_3O^+]}{dt} = 0 - \frac{2}{V_s}\cdot\frac{dx}{dt} = -2.v(t)$$

d'où: $v(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d[H_3O^+]}{dt}$

2.2- Non; car le tableau ne permet pas de déterminer la valeur de la dérivée.

2.3- La concentration en ions H_3O^+ dans le mélange à une date t est:

$$[H_3O^+] = \frac{n(H_3O^+)}{V_s} = \frac{n_2 - 2x}{V_s} = C - \frac{2x}{V_s}$$

Remarque: On a $\frac{n_2}{V_s} = [H_3O^+] = C$ et $[H_3O^+] < [H_3O^+]_0$

d'où: $[H_3O^+] = C - = \frac{2}{V_S.V_M}V(C_2O)$

2.4- A la date $t = t_{\frac{1}{2}}$ on a:

$$x = \frac{1}{2}x_f = \frac{1}{2}x_{max} = \frac{n_2}{4}$$

alors: $[H_3O^+] = C - \frac{2}{V_s}\cdot\frac{n_2}{4}$

$$= C - \frac{C}{2} = \frac{C}{2}$$

$$= 2.10^{-2}mol/L$$

2.5- En utilisant le tableau, on constate que cette concentration correspond à $t_{\frac{1}{2}} = 60s$.

6 On étudie la transformation chimique modélisée par l'équation de réaction suivante:

$$C_4H_8O_{2(aq)} + Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow Na^+_{(aq)} + CH_3COO^-_{(aq)} + C_2H_5OH_{(aq)}$$

A une date $t = 0$, on introduit une quantité de matière d'éthanoate d'éthyle $(C_4H_8O_2)$ dans un récipient contenant une solution d'hydroxyde de sodium.

Toutes les espèces chimiques du mélange de volume $V = 100mL$; ont des concentrations égales: $C = [HO^-]_0 = [Na^+]_0 = [C_4H_8O_2]_0 = 10^{-2}mol.L^{-1}$

La mesure de la conductivité σ de la solution au cours de la transformation a donné les résultats suivants:

t *en* min	0	5	9	13	20	27	∞
σ *en* $S.m^{-1}$	0,250	0,210	0,192	0,178	0,160	0,148	0,091

On donne en: $S.m^2.mol^{-1}$

$$\lambda_{CH_3COO^-} = 4,1.10^{-3}\ ;\ \lambda_{HO^-} = 20.10^{-3}\ ;\ \lambda_{Na^+} = 5.10^{-3}\ :\ S.m^2.mol^{-1}$$

1- Vérifier la valeur de σ_0 : conductivité du mélange à l'état initial.

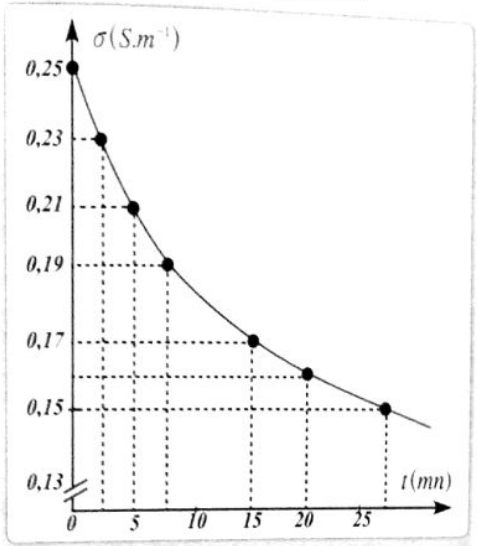
2- Montrer qu'à la date t où l'avancement est x; la conductivité de la solution est:

$$\sigma = 0,25 - 159x.$$

3- La courbe de la figure ci-contre donne l'évolution de la conductivité en fonction du temps.

3-1- Déterminer la valeur de σ au temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$.

3-2- En déduire la valeur de $t_{\frac{1}{2}}$.



Solution

1- A l'état initial, les seuls ions se trouvant dans la solution sont Na^+ et HO^-.

$\sigma_0 = \lambda_{Na^+}.[Na^+]_0 + \lambda_{HO^-}.[HO^-]_0$

$= (\lambda_{Na^+} + \lambda_{HO^-}).C$

$C = 10^{-2}mol/L = 10^{-2}.mol/10^3.m$

$= 10mol/m^3$

$\sigma_0 = (5+20).10^{-3} \times 10 = 0,25S.m^{-1}$

Cette valeur est la même que celle du tableau de mesures.

Scanned with CamScanner

2-

Réaction		$C_4H_8O_2 + HO^-_{(aq)} \longrightarrow A^-_{(aq)} + B_{(aq)}$			
Instant	Avancement	Quantités de matière			
0	0	C_0V	C_0V	0	0
t	$x(t)$	C_0V-x	C_0V-x	x	x
∞	x_{max}	C_0V-x_{max}	C_0V-x_{max}	x_{max}	x_{max}

Les ions présents dans la solution à la date t sont:

Les ions Na^+ inactifs (spectectateurs) de concentration C.

Les ions A^- formés et les ions HO^- restants.

$[A^-] = \frac{x}{V}$ et $[HO^-] = \frac{C_0V-x}{V} = C_0 - \frac{x}{V}$

$$\sigma = \lambda_{Na^+}[Na^+] + \lambda_{A^-}[A^-] + \lambda_{HO^-}[HO^-]$$
$$= \lambda_{Na^+}.C + \lambda_{A^-}.\frac{x}{V} + \lambda_{HO^-}\left(C - \frac{x}{V}\right)$$
$$= (\lambda_{Na^+} + \lambda_{HO^-}).C - (\lambda_{HO^-} - \lambda_{A^-})\frac{x}{V}$$
$$= \sigma_0 - (\lambda_{HO^-} - \lambda_{A^-})\frac{x}{V}.$$
$$= 0,25 - \left(\frac{x}{100.10^{-6}}\right); 1L = 10^{-3}m^3$$
$$= 0,25 - 159x$$

3.1- A la date $t = t_{\frac{1}{2}}$ on a:

$$x = \frac{1}{2}x_f = \frac{1}{2}x_{max} = \frac{C_0V}{2}$$

$$x = \frac{10^{-2}.100.10^{-3}}{2} = 5.10^{-4}mol;$$

alors $\sigma(t_{\frac{1}{2}}) = 0,25 - 159.x(t_{\frac{1}{2}})$
$= 0,25 - 159.5.10^{-4}$
$= 0,17S.m^{-1}$

3.2- Sur la courbe on lit $t_{\frac{1}{2}} = 15mn$.

7 Dans cet exercice, on étudie la réaction entre l'éthanoate d'éthyle de formule $CH_3CO_2C_2H_5$ noté E par la suite et les ions hydroxydes HO^-.

L'équation de cette réaction s'écrit:

$$CH_3 - CO_2 - C_2H_5 + HO^- \longrightarrow CH_3 - CO_2^- + C_2H_5OH$$

A $t = 0$, on mélange dans un bécher maintenu à température constance une quantité $n_1 = 10,0mmol$ de soude et une quantité n_2 d'ester E en excès. On note V le volume total de la solution obtenue.

Le déroulement de cette réaction est suivi par conductimétrie, la conductance du mélange est mesurée régulièrement. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous.

$t(s)$	0	15	30	60	90	120	au bout d'un temps très long
$G(mS)$	46,2	28,6	18,6	14,0	12,3	11,5	10,7

Données: conductivités ioniques molaires à $25°C$ $(mS.m^2.mol^{-1})$:

$\lambda(Na^+) = 5,01$; $\lambda(OH^-) = 19,9$; $\lambda(CH_3CO_2^-) = 4,09$

Volume du mélange réactionnel: $V = 50mL$

1- Pourquoi la conductance mesurée diminue-t-elle au cours de la transformation chimique?

2- Exprimer la conductance G en notant k la constante de cellule et σ la conductivité de la solution.

3- Donner l'expression de la conductance initiale G_0 en fonction de k, n_1, V et des conductivités molaires ioniques λ_i.

4- On note x l'avancement de la réaction à la date t. Montrer que l'expression de la conductance $G(t)$ à la date t en fonction de x. s'écrit sons la forme: $G(t) = G_0 + ax$ avec: a une constante dont l'expression est à déterminer en fonction des données.

5- Exprimer la conductance finale de la solution, soit G_f.

6- Etablir l'expression suivante:

$$x = \frac{G(t) - G_0}{G_f - G_0}.n_1$$

7- Une exploitation graphique des résultats du tableau précédent a permis d'obtenir $\frac{dG}{dt} = -1,3mS.s^{-1}$ à la date $t = 0$.

7.1- Exprimer la vitesse volumique de cette réaction en fonction de G.

7.2- Déterminer cette vitesse à la date $t = 0$.

Solution

1- Lors du déroulement de la réaction, la solution s'appauvrit en ions hydroxyde HO^- et s'enrichit en ions éthanoate $CH_3 - CO_2^-$. Comme les ions éthanoate ont une conductivité molaire ionique nettement inférieure à celle des ions hydroxyde, la conductance de la solution diminue.

2- La conductance G est proportionnelle à la conductivité σ de la solution: $G = k.\sigma$ où k représente la constante de la cellule de mesure.

3- Initialement, les ions hydroxyde HO^- et sodium Na^+ sont les seules espèces ioniques présentes. Leurs concentration vaut: $[HO^-]_i = [Na^+]_i = \frac{n_1}{V}$

Les ions Na^+ sont des ions spectateurs: ils ne participent pas à la réaction, mais ils contribuent à la conduction du courant dans la solution et figurent donc dans l'expression de la conductivité.

La conductivité σ_0 de la solution s'écrit alors: $\sigma_0 = (\lambda(Na^+) + \lambda(HO^-)).\left(\frac{n_1}{V}\right)$

soit pour la conductance:

$G_0 = k.\sigma_0 = \left(\frac{k}{V}\right).[(\lambda(Na^+) + \lambda(HO^-))].n_1$ (1)

Scanned with CamScanner

4- à la date t d'avancement x, les quantités de matière des divers ions valent:

$$n(Na^+) = n_i \; ; \; n(HO^-) = n_i - x \; ; \; n(CH_3 - CO_2^-) = x$$

d'où: $$[Na^+] = \frac{n_i}{V} \; ; \; [HO^-] = \frac{(n_i - x)}{V} \; ; \; [CH_3 - CO_2^-] = \frac{x}{V}$$

La conductance de la solution s'en déduit:

$$G(t) = k\left(\lambda(Na^+).\frac{n_i}{V} + \lambda(HO^-).\frac{(n_i - x)}{V} + \lambda(CH_3 - CO_2^-).\frac{x}{V}\right);$$

soit: $G(t) = \left(\frac{k}{V}\right)[(\lambda(Na^+) + \lambda(HO^-)).n_i + (\lambda(CH_3 - CO_2^-) - \lambda(HO^-)).x]$ (2)

qui, à l'aide de la relation (1), peut aussi s'écrire:

$$G(t) = G_0 + \left(\frac{k}{V}\right).(\lambda(CH_3 - CO_2^-) - \lambda(HO^-)).x \quad (2')$$

5- L'ester étant en excès, l'ion hydroxyde est le réactif limitant, aussi en fin d'évolution a-t-on: $x_f = n_i$ et $n_f(Na^+) = n_i \; ; \; n_f(HO^-) = 0 \; ; \; n_f(CH_3 - CO_2^-) = n_i$.

D'où: $$G_f = \left(\frac{k}{V}\right).((\lambda Na^+) + (\lambda(CH_3 - CO_2^-)).n_i \quad (3)$$

6- à l'aide de la relation (2'), il vient:

$$x = \frac{G(t) - G_0}{\left(\frac{k}{V}\right).((\lambda CH_3 - CO_2^-) - \lambda(HO^-))} \quad (4)$$

L'équation (3) peut se réécrire:

$$G_f = \left(\frac{k}{V}\right).(\lambda(Na^+) + \lambda(HO^-) - \lambda(HO^-) + \lambda(CH_3 - CO_2^-)).n_i$$

soit: $$G_f = \left(\frac{k}{V}\right).(\lambda(Na^+) + \lambda(HO^-)).n_i + \left(\frac{k}{V}\right).(\lambda(CH_3 - CO_2^-) - \lambda(HO^-)).n_i$$

d'où: $$G_f = G_0 + \left(\frac{k}{V}\right).[\lambda(CH_3 - CO_2^-) - \lambda(HO^-)].n_i$$

et: $$n_i = \frac{G_f - G_0}{\left(\frac{k}{V}\right).(\lambda(CH_3 - CO_2^-) - \lambda(HO^-))} \quad (5)$$

Le quotient membre des relations (4) et (5) conduit à: $\frac{x}{n_i} = \frac{G(t) - G_0}{G_f - G_0}$

soit: $x = n_i.\frac{G(t) - G_0}{G_f - G_0}$

7-1- Avant de dériver, on peut écrire cette expression sous la forme:

$$x = \frac{n_i}{G_f - G_0}G(t) - \frac{n_i.G_0}{G_f - G_0} = AG(t) + B$$

d'où: $\frac{dx}{dt} = A.\frac{dG}{dt}$

or: $v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{A}{V}.\frac{dG}{dt} = \frac{n_i}{V(G_f - G_0)}\frac{dG}{dt}$

7.2- $V_0 = \frac{n_i}{V(G_f - G_0)}\left(\frac{dG}{dt}\right) = \frac{10,0.10^{-3}}{50.10^{-3}(10,7 - 46,2).10^{-3}}(-1,3.10^{-3})$

$= 7,3.10^{-3} mol.L^{-1}.s^{-1}$

8 Les oxydes tels que NO, NO_2, N_2O_5,... sont considérés parmi les gaz les plus polluants: ils favorisent l'effet de serre et participent à la formation des pluies acides.

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude cinétique de la dissociation du pentaoxyde d'azote N_2O_5 en NO_2 et O_2.

Données:

- tous les gaz sont considérés comme parfaits;
- équation d'état des gaz parfaits: $p.V = n.R.T$;
- constante des gaz parfaits: $R = 8,31(S.I)$.

On introduit à l'état initial $(t = 0)$; du pentaoxyde d'azote dans une enceinte vide de volume constant $V = 0,5L$.

Un baromètre permet de mesurer la pression totale p à l'intérieur de l'enceinte; à température constante $T = 318K$.

La pression mesurée au début de la dissociation; à $t = 0$; est $p_0 = 4,638.10^4 Pa$.

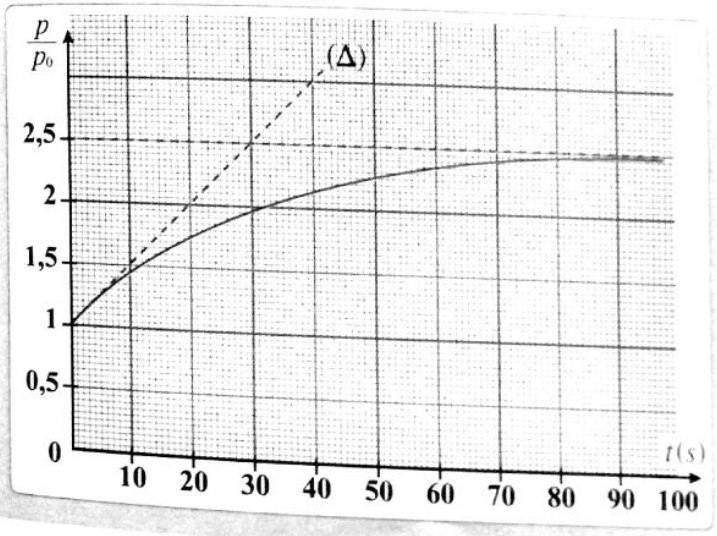
La dissociation du pentaoxyde d'azote est modélisée par l'équation suivante:

$$2N_2O_5(g) \longrightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

La mesure de la pression P à différents instants a permis de représenter les variations de la grandeur $\frac{p}{p_0}$ en fonction du temps. (Voir figure).

La droite (Δ) représente la tangente à la courbe de $\frac{p}{p_0} = f(t)$ à l'instant $t = 0$.

1- Calculer la quantité de matière n_0 de d'azote introduite dans l'enceinte à $t = 0$.



Scanned with CamScanner

2- Calculer l'avancement x_{max} de cette réaction.

3- Exprimer n_T la quantité de matière totale des gaz dans le volume V à l'instant t en fonction de n_0 et x l'avancement de la réaction à cet instant.

4- En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits; établir la relation $\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{3x}{n_0}$.

5- Trouver l'expression de la vitesse volumique de la réaction en fonction de n_0, V et la dérivée par rapport au temps de la fonction $\frac{p}{p_0} = f(t)$. Calculer sa valeur à $t = 0$.

Solution

1- $n_0 = \frac{p_0 V}{RT} = \frac{4,638.10^4.0,5.10^{-3}}{8,31.318}$

$= 8,77.10^{-3} mol$

2- $x_{max} = \frac{n_0}{2} = 4,385.10^{3} mol$

	$2N_2O_5(g) \longrightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$			
à $t = 0$	$x = 0$	n_0	0	0
à t	x	$n_0 - 2x$	$4x$	x

3- Les trois constituants du mélange sont des gaz; alors:

$n_T = n(N_2O_5) + n(NO_2) + n(O_2)$

$= (n_0 - 2x) + 4 + x$

$= n_0 + 3x$

4- A la date t :

$p.V = n_T.RT = (n_0 + 3x)RT$ (1)

or: $PoV = n_0 RT$ (2)

on effectue le rapport $\frac{(1)}{(2)}$ et on

$\frac{p}{p_0} = \frac{n_0 + 3x}{n_0} = 1 + \frac{3x}{n_0}$ (3)

5- La vitesse volumique de la réaction s'écrit: $v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$

La dérivée de la relation (3) donne:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{3}{n_0}.\frac{dx}{dt}$; d'où

$\frac{dx}{dt} = \frac{n_0}{3}.\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{p_0}\right)$

alors: $v = \frac{1}{V}.\frac{n_0}{3}.\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{n_0}{3V}\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{p_0}\right)$

A la date $t = 0$; $v_0 = \frac{n_0}{3V}.a_0$ (a_0 : pente de la tangente (Δ))

$a_0 = \frac{2,5 - 1}{30 - 0} \simeq 5.10^{-2} s^{-1}$

d'où:

$v_0 = \frac{n_0}{3V}a_0 = \frac{8,77.10^{-3}}{3.0,5.10^{-3}}.5.10^{-2}$

$\simeq 2,9.10^{-4} mol.L^{-1}.s^{-1}$

9 à température élevée en phase gazeuse, le buta-1,3-diène de formule C_4H_6 se transforme en 4-vinylcyclohexène de formule C_8H_{12} suivant la réaction d'équation:

$$2C_4H_6(g) \longrightarrow C_8H_{12}(g)$$

Afin d'étudier cette réaction, une certaine quantité de buta-1,3-diène est introduite dans un récipient de volume $V = 100,0cm^3$ constant, maintenu à température constante $T = 609K$.

On mesure alors la pression totale p dans le récipient en fonction du temps.

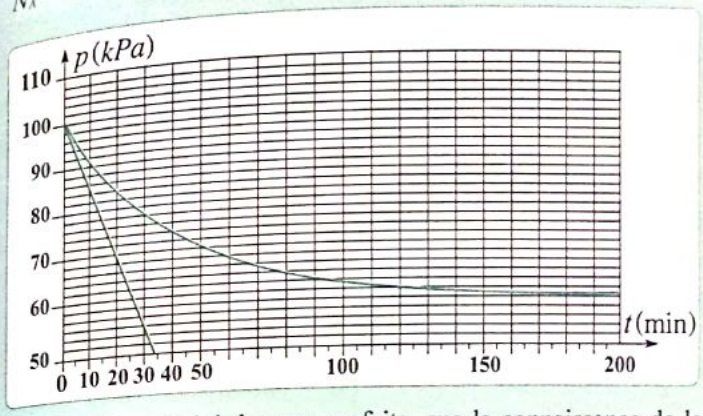
$t(min)$	0	8	15	30	60	90	120	150	180
$p(t)(kPa)$	101,3	91,6	86	77,8	69,2	64,7	62	60,2	58,9

Les variations de $p(t)$ sont reportées sur le graphe du schéma ci-dessous.

On considère que les gaz du mélange sont parfaits.

Données: $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$;

$N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}$



1- Montrer, en utilisant la loi des gaz parfaits, que la connaissance de la pression initiale p_0 et de la température T suffit pour calculer la quantité de matière n_0 du butadiène C_8H_{12} à la date $t = 0$. Calculer n_0.

2- En utilisant un tableau de cette transformation, exprimer l'avancement x à la date t en fonction de p, n_0, R, T et V.

3- Déterminer la valeur de la pression à la date $t = t_{\frac{1}{2}}$.

En déduire la valeur de $t_{\frac{1}{2}}$

4- Quelle relation existe-t-il entre la vitesse volumique de réaction et $\frac{dp}{dt}$?

5- Déterminer la vitesse volumique de réaction à l'instant origine.

Que signifie «choc efficace»?

Déduire de la vitesse initiale le nombre Z_{eff} de chocs moléculaires efficaces, par unité de temps et de volume, dans le système initial.

Scanned with CamScanner

Solution

1- D'après l'équation d'état des gaz parfaits: $p_0 = \frac{n_0}{V}.R.T$

D'où:

$$n_0 = \frac{p_0.V}{R.T} = \frac{101,3.10^3.100.10^{-6}}{8,314.609}$$
$$= 2.10^{-3} mol$$

2- On établit le tableau d'avancement de la réaction:

Espèce	C_4H_6	C_8H_{12}	*Total gaz*
Quantité à $t = 0$	n_0	0	n_0
Quantité à t	$n_0 - 2x$	x	$n_0 - x$

La pression totale est reliée à la quantité totale de gaz par l'équation d'état des gaz parfaits.

$$p = (n_0 - x).\frac{R.T}{V} = n_0\frac{R.T}{V} - x.\frac{RT}{V}$$
$$= p_0 - x.\frac{R.T}{V}$$

On en déduit: $x = \frac{p_0 - p}{R.T}.V$

3- L'avancement maximal est: $x_{max} = \frac{n_0}{2}$

Pour $t = t_{\frac{1}{2}}$ on a $x = x_{max}$

Donc:

$$p(t_{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{3}{4}\right).R.T = \frac{3}{4}p_0 = 76,0kPa$$

D'après le résultat $p(t_{\frac{1}{2}}) = 76,0kPa$; on lit sur la courbe: $t_{\frac{1}{2}} \simeq 35\,\text{min}$

4- La vitesse volumique a pour expression:

$$v = \frac{1}{V}\frac{dx}{dt}$$

La relation établie à la question (2) permet de tirer: $\frac{x}{V} = \frac{p_0 - p}{R.T}$

Dérivons cette expression par rapport au temps: $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{V}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{p_0 - p}{RT}\right)$

Les grandeurs V, p_0, R et T sont constantes, alors:

$$\frac{1}{V}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p_0}{RT}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{RT}\right)$$
$$v = 0 - \frac{1}{RT}\frac{dp}{dt}$$
$$v = -\frac{1}{RT}\frac{dp}{dt}$$

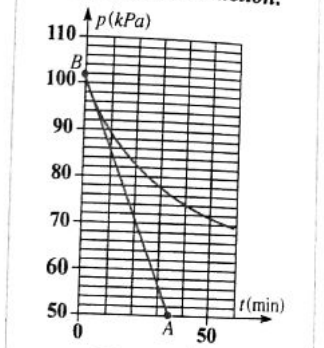
5- Pour déterminer la vitesse volumique de réaction à l'instant origine on utilise la tangente à la courbe $p(t)$ pour $t = 0$ représentée ci-dessous, et on mesure la pente a_0.

$$a_0 = \left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0} = -1,45.kPa.\text{min}^{-1};$$
$$= -1,45.10^3 Pa.\text{min}^{-1}$$

$$v_0 = \frac{-1}{R.T}.\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0};$$

$$v_0 = 0,28mol.m^{-3}.\text{min}^{-1}$$
$$= 0,28mmol.L^{-1}.\text{min}^{-1}$$

Détermination de la vitesse initiale de la réaction:



$$a_0 = \frac{-BO}{OA} = \frac{-101,3 + 50}{35,5}$$
$$= -1,45.kPa.\text{min}^{-1}$$

6- Chaque choc moléculaire efficace se traduit par la formation d'une molécule de butadiène C_8H_{12}. Le nombre de chocs moléculaires efficaces, par unités de temps et de volume, est égal au nombre de molécules de butadiène formé par unités de temps et de volume.

D'après le tableau d'avancement, $x = [C_8H_{12}]$.

donc: $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d[C_4H_{12}]}{dt}$

La vitesse volumique est donc égale au nombre de moles de molécules formé par unités de temps et de volume.

On a donc: $Z_{eff} = N_A.\left(\frac{dx}{dt}\right)$

Soit à $t = 0$:

$$Z_{eff} = 6,02.10^{23} \times 0,28$$
$$= 1,7.10^{23} m^{-3}.\text{min}^{-1}$$

En utilisant les unités du système international:

$$Z_{eff} = 2,8.10^{21} m^{-3}.s^{-1}.$$

Scanned with CamScanner

2 TRANSFORMATIONS CHIMIQUES LIMITÉES

I- Les réactions acido-basiques:

1 Acide et base selon la théorie de Brönsted:

- Un acide est une espèce chimique moléculaire ou ionique susceptible de céder un proton H^+.
- Une base est une espèce chimique moléculaire ou ionique susceptible de céder un proton H^+.:

2 Couple acide-base:

Un couple acide-base (noté AH/A^- ou BH^+/B) est formé par un acide et une base, reliés par l'écriture formelle appelée «demi-équation acido-basique».

$AH \rightleftharpoons A^- + H^+$ ou $BH^+ \rightleftharpoons B + H^+$

Cette demi-équation ne correspond pas à une réaction réelle; elle traduit le passage d'une espèce à l'autre selon les conditions expérimentales.

Les espèces acide et basique d'un couple sont dites conjuguées.

Exemples:

- Acide chlorhydrique HCl/Cl^- ion chlorure, acide éthanoïque $COOH/CH_3COO^-$ ion éthanoate.
- ion ammonium NH_4^+/NH_3 ammoniac.
- Les ampholytes:

Certaines espèces se comportent, selon la nature du milieu; soit comme acide soit comme base.

Exemple: l'eau: H_2O/HO^- ; H_3O^+/H_2O.

l'ion hydrogénocarbonate (HCO_3^-): HCO_3^-/CO_3^{2-} ; H_2CO_3/HCO_3^-.

3 Réaction acide-base:

Une réaction acide-base est un transfert de proton H^+ d'un acide couple vers la base d'un autre couple.

acide − base ⟶ base 1 + acide 2

Exemple: $CH_3COOH + NH_3 \longrightarrow CH_3COO^- + NH_4^+$

Propriété cinétique : Les réactions acide-base sont toujours rapides.

4 *pH* d'une solution aqueuse:

- **Définition:** le pH est un nombre sans unité, utilisé pour caractériser l'acidité d'une solution aqueuse.
- Pour les solutions diluées ($[H_3O^+] \leq 5.10^{-2} mol.L^{-1}$) ou le définit par la relation suivante : $pH = -\log[H_3O^+]$

Dans cette relation, $[H_3O^+]$ représente le nombre qui mesure la concentration molaire en ions oxonium H_3O^+ exprimée en mole par litre ($mol.L^{-1}$).

Cette relation est équivalente à : $[H_3O^+] = 10^{-pH} (mol.L^{-1})$

Mesure de *pH*: Le pH se mesure directement à l'aide d'un pH-mètre.

Nature d'une solution aqueuse (à $25°C$):

- La solution est dite solution acide; lorsque $pH < 7$, il lui correspond $[H_3O^+] > 10^{-7} mol.L^{-1}$.
- La solution est dite basique; lorsque $pH > 7$, $[H_3O^+] < 10^{-7} mol.L^{-1}$.
- La solution est dite neutre, lorsque $pH = 7$, $[H_3O^+] = 10^{-7} mol.L^{-1}$.

Exemples:

- une solution aqueuse où $[H_3O^+] = 10^{-2} mol.L^{-1}$ a pour pH la valeur $pH = 2$.
- Si $[H_3O^+] = 5.10^{-3}$ alors: $pH = -\log(5.10^{-3}) = 2,3$.
- Inversement $pH = 4,7$ alors: $[H_3O^+] = 10^{-4,7}$

$\simeq 2.10^{-5} mol/L$

II- Réactions totale et réaction limitée:

1 Expérience:

- Etudions les deux réactions suivantes: La réaction de l'acide chlorhydrique avec l'eau: $HCl_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow Cl_{(aq)}^- + H_3O_{(aq)}^+$

La réaction de l'acide éthanoïque avec l'eau:

$CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow CH_3COO_{(aq)}^- + H_3O_{(aq)}^+$

Si on prépare deux solutions identiques, de mêmes volume V et même concentration C; ces deux solutions n'ont pas le même pH.

Dans le cas où $C = 10^{-2} mol.L^{-1}$, la mesure de pH donne :

$pH = 2$ pour la solution de HCl.

$pH = 3,4$ pour la solution de CH_3COOH.

Scanned with CamScanner

2 Avancement maximal:

La quantité initiale de l'acide est dans les cas la même: $n_0 = CV$.

L'acide, le réactif limitant (l'eau solvant);

donc: $x_{max} = CV$

3 Avancement final et taux d'avancement final:

		$AH + H_2O \longrightarrow A^- + H_3O^+$			
Etat initial	$x = 0$	$n_0 = CV$	en excès	0	0
Etat final	$x = x_f$	$CV - x_f$	en excès	x_f	x_f

- Exprimons x_f en fonction du pH de la solution:

$$x_f = n_f(H_3O^+) = [H_3O^+].V = 10^{-pH}.V$$

- Comparons x_f et x_{max} en utilisant le rapport noté τ et appelé «taux d'avancement final de la réaction». $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$

• Dans le cas de la solution de $HC\ell$:

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{10^{-pH}.V}{C.V} = \frac{10^{-pH}}{C} = \frac{10^{-2}}{10^{-2}} = 1 = 100\%$$

La réaction est dite totale :

• Dans le cas la solution de CH_3COOH :

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{10^{-pH}.V}{C.V} = \frac{10^{-pH}}{C} = \frac{10^{-3,4}}{10^{-2}}$$

$$\simeq 4.10^{-2} = 4\%$$

Lorsque $\tau < 1$ $(x_f < x_{max})$ la réaction est dite limitée.

4 Concentration finale du réactif limitant:

Le tableau d'avancement permet d'écrire à l'état final:

$$[AH] = \frac{n(AH)}{V} = \frac{CV - x_f}{V} = C - \frac{x_f}{V} = C - [H_3O^+] = C - 10^{-pH}$$

- Cas de $HC\ell$: $[HC\ell] = 10^{-2} - 10^{-2} = 0$
- Cas de $[CH_3COOH]$: $[CH_3COOH] = 10^{-2} - 10^{-3,4}$

$$= 9,6.10^{-3} mol/L$$

L'acide éthanoïque n'est pas totalement consommé à la fin de la réaction.

Conclusions

1 Réaction totale:

- Une réaction totale est une réaction qui se poursuit jusqu'à la disparition totale du réactif limitant.
- Dans le cas particulier d'un mélange stoechiométrique, les deux réactifs disparaissent totalement.
- Une réaction totale est caractérisée par: $x_f = x_{max}$ et $\tau = 1$.

2 Réaction limitée:

- Une réaction limitée est une réaction à la fin de laquelle aucun des réactifs ne disparaît totalement.
- Elle est caractérisée par: $x_f < x_m \Longleftrightarrow \tau < 1$.

Une réaction limitée est modélisée par une équation à double flèche.

réactifs $\rightleftharpoons$ produits

3 Equilibre chimique:

1- Définition:

Lorsqu'une réaction chimique limitée atteint son état final, tous les constituants du mélange coexistent et la quantité de matière de chacun de ces constituants devient constante., le système n'évolue plus, on dit qu'il atteint un état d'équilibre.

2- Interprétation microscopique:

A l'échelle microscopique, les deux réactions opposées ne s'arrêtent pas, elles continuent à se faire à des vitesses égales, la quantité de matière formée par l'une est simultanément détruite par l'autre; de telle sorte que la composition du mélange reste constante, on dit alors que l'équilibre chimique est un équilibre dynamique.

4 Facteurs influençant le taux d'avancement final:

- La valeur que prend le taux d'avancement final τ; à fin d'une réaction donnée, dépend de deux paramètres: la température et la composition du mélange initial.
- Lorsque la température est constante, sa valeur ne dépend que de la concentration initiale des réactifs.

Scanned with CamScanner

1 L'aspirine est un acide connu sous le nom d'acide acétylsalicylique (forme ci-contre).

On symbolise cet acide par AH.

On prépare une solution d'aspirine en faisant dissoudre $89,15mg$ d'aspirine dans $50\,mL$ d'eau.

Le taux d'avancement final de la réaction entre l'aspirine et l'eau est de 16% et le pH de la solution obtenue vaut 2,8.

1- Ecrire l'équation de la réaction de l'aspirine avec l'eau.

2- En utilisant un tableau d'avancement de cette réaction, montrer que: $\tau = \frac{10^{-pH}}{C}$

3- Déterminer la masse molaire de l'aspirine.

Solution

1- $AH_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2- $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n_f(H_3O^+)}{CV} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-pH}}{C}$;

3- On a: $C = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV}$;

donc: $\tau = \frac{10^{-pH}}{\frac{m}{MV}} = \frac{MV}{m}.10^{-pH}$;

Alors:

$M = \frac{\tau.m}{V}.10^{pH}$

$M = \frac{16.10^{-2}.89,15.10^{-3}.10^{2,8}}{50.10^{-3}} = 180g.mol^{-1}$

	$AH + H_2O \longrightarrow A^- + H_3O^+$			
$x = 0$	$n = CV$	excès	0	0
x_f	$CV - x_f$	excès	x_f	x_f

2 On considère trois solutions aqueuses S_1, S_2 et S_3 d'acide nitreux HNO_2 deconcentrations molaires apportées respectives $C_1 = 1,0.10^{-1}mol.L^{-1}$; $C_2 = 1,0.10^{-2}mol.L^{-1}$ et $C_3 = 1,0.10^{-5}mol.L^{-1}$.

1- Ecrire l'équation de la réaction entre l'acide nitreux et l'eau.

2- La mesure du pH de ces trois solutions conduit aux valeurs suivantes:

$pH_1 = 2,1$; $pH_2 = 2,7$ et $pH_3 = 5,0$.

2.1- Calculer, dans les trois cas, le taux d'avancement final de la transformation.

2.2- Le taux d'avancement final dépend-il des conditions initiales? Dans quel cas, cette transformation peut-elle être considérée comme totale?

Solution

1- Dans cette réaction, le transfert de proton a lieu de l'acide nitreux vers l'eau qui joue le rôle de la base.

$HNO_{2(aq)} + H_2O \rightleftarrows NO_{2(aq)}^- + H_3O^+_{(aq)}$

2.1- Par définition, le taux d'avancement final vaut: $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$.

Les réactions acido-basiques étant rapides, l'avancement final est toujours atteint lorsqu'on mesure le pH. Or ici $x_f = n_f(H_3O^+)$.

En appelant V le volume de la solution, on en déduit: $x_f = [H_3O^+].V$.

De plus: $x_{max} = C.V$.

Il vient: $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[H_3O^+]}{C} = \frac{10^{-pH}}{C}$

On obtient alors pour les solutions S_1, S_2 et S_3: $\tau_1 = 0,079$; $\tau_2 = 0,20$ et $\tau_3 = 1$.

2.2- Le taux d'avancement final dépend des conditions initiales.

Il augmente lorsque la concentration apportée diminue. Pour des solutions concentrées, la réaction est très limitée alors que pour des solutions très diluées, elle peut être considérée comme totale.

3 L'acide chlorhydrique $HC\ell$ se dissocie totalement dans l'eau, pour donner une solution acide.

On mélange un volume $V_1 = 10mL$ d'une solution S_1 d'acide chlorhydrique de $pH = 2,0$ et un volume $V_2 = 90mL$ d'une solution S_2 d'acide chlorhydrique de $pH = 3,0$.

1- Quelles sont les concentrations C_1 et C_2 de ces deux solutions?

2- Citer les espèces chimiques présentes dans le mélange.

3- Quel est le pH de ce mélange?

Solution

1- $HC\ell$ réagit totalement avec l'eau, $\tau = 1$; $x_f = n_f(H_3O^+) = x_{max} = CV$;

donc: $[H_3O^+] = C$

$C_1 = [H_3O^+] = 10^{-pH_1} = 10^{-2}mol/L$ et

$C_2 = 10^{-pH_2} = 10^{-3}mol/L$

2- $H_3O^+_{(aq)}$ et $C\ell^-_{(aq)}$. Les solutions S_1 et S_2 ne donnent aucune réaction.

3- Dans le mélange on a:

$n(H_3O^+) = n_1 + n_2 = C_1V_1 + C_2V_2$;

alors:

$[H_3O^+] = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{V_1 + V_2}$

$= \frac{10^{-2}.10.10^{-3} + 10^{-3}.90.10^{-3}}{10^{-1}}$

$= 1,9.10^{-3}mol/L$

Donc:

$pH = -\log[H_3O^+] = -\log(1,9.10^{-3}) \simeq 2,7$

4 Une solution commerciale S_0 porte les indications suivantes:

Acide bromhydrique HBr.

Pourcentage en masse 46%.

Densité 1,47.

Données: masse volumique de l'eau: $\rho_0 = 1g.mL^{-1}$ et $M(HBr) = 81g.mol^{-1}$.

1- Montrer que la concentration de cette solution est : $C_0 = 8,35mol.L^{-1}$

2- Ecrire la réaction de cet acide avec l'eau.

Scanned with CamScanner

3- Cette réaction est totale. Peut-on calculer son pH ? Pourquoi?

4- On prépare une solution S de concentration $C = 5.10^{-2} mol/L$ et de volume $V = 0,5L$, en diluant la solution commerciale S_0.

Quel volume V_0 doit-on prendre de S_0 pour effectuer cette opération?

5- Quel est le pH de la solution diluée S?

Solution

1- $C_0 = \frac{n}{V_0}$; V_0 : volume de la solution

$n = \frac{m}{M} = \frac{P.m_0}{M}$; m : masse de HBr et m_0 : masse de la solution

$C_0 = \frac{P}{M}.\frac{m_0}{V_0} = \frac{P}{M}.\rho_0 = \frac{P}{M}.d.\rho_{eau}$

$C_0 = \frac{46.10^{-2}.1,47.10^3}{81} \simeq 8,35 mol/L$

2- $HBr_{(aq)} + H_2O_{(l)} \longrightarrow Br^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

3- Non, car la formule $pH = -\log[H_3O^+]$ est valable uniquement pour les solutions moyennement diluées telles que: $10^{-1} < [H_3O^+] < 10^{-6}$ en (mol/L).

4- Loi de la dilution : $C_0V_0 = CV$

$V_0 = \frac{CV}{C_0} = \frac{5.10^{-2}.10^{-1}}{8,35} = 1,5mL$

5- $pH = -\log[H_3O^+]$

$= -\log(5.10^{-2})$

$= 1,3$

5 On considère un acide AH dont la réaction avec l'eau est totale.

1- Montrer que si la concentration d'une solution aqueuse de cet acide est C, alors le pH de cette solution est: $pH = -\log C$.

2- On dispose d'une solution S_1 de l'acide AH de concentration C_1 et de $pH = pH_1$. On dilue cette solution n fois (n est le facteur de dilution), et on obtient une solution S_2 de concentration C_2.

2.1- Montrer qu'en passant de S_1 à S_2 le pH subit une augmentation qui s'exprime par $\Delta pH = \log n$.

2.2- Calculer pH_2 pour $pH_1 = 2$ et $n = 20$.

2.3- Quelles sont les valeurs de C_1 et C_2?

Solution

1- $AH_{(aq)} + H_2O_{(l)} \longrightarrow A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

Cette réaction étant totale, on a l'état final: $n(H_3O^+) = x_f = x_{max} = CV$;

d'où: $[H_3O^+] = C$

$pH = -\log[H_3O^+] = -\log C$

2.1- $\Delta pH = pH_2 - pH_1 = -\log C_2 - (-\log C_1)$

$= \log C_1 - \log C_2$

$= \log \frac{C_1}{C_2}$

On a: $C_1 = 20C_2$, alors: $\Delta pH = \log n$

2.2- $pH_2 = pH_1 + \log n = 2 + \log 20 = 3,3$;

$C_1 = 10^{-pH} = 10^{-2} mol/L$;

$C_2 = \frac{C_1}{20} = 5.10^{-4} mol/L$;

ou encore:

$C_2 = 10^{-pH_2} = 10^{-3,3} = 5.10^{-4} mol/L$

6 Toutes les mesures sont effectuées à $25°C$.

On prépare un volume $V = 1L$ de solution d'acide fluorhydrique HF de concentration en soluté apporté $C = 10^{-2} mol.L^{-1}$.

Le pH de cette solution est de 2,6.

1- Ecrire l'équation de réaction de cet acide avec l'eau.

2- En utilisant un tableau d'avancement; exprimer le taux d'avancement final τ en fonction de C et pH.

Calculer sa valeur et conclure.

3- La mesure de la conductivité de cette solution a donné: $\sigma = 0,10 S.m^{-1}$.

On donne à $25°C$: $\lambda_{H_3O^+} = 35.10^{-3} S.m^2.mol^{-1}$

$\lambda_{F^-} = 5,5.10^{-3} S.m^2.mol^{-1}$

Retrouver la valeur du pH de la solution.

Solution

1- $HF_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftarrows F^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2- $x_{max} = CV$

car et $x_f = n_f(H_3O^+)$

$= [H_3O^+]V = 10^{-pH}.V$

$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{10^{-pH}}{C}$; $\tau = \frac{10^{-2,6}}{10^{-2}} \approx 0,25 < 1$

(réaction limitée)

3- $\sigma = \lambda_{H_3O^+}.[H_3O^+] + \lambda_{F^-}.[F^-]$

$= (\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{F^-}).[H_3O^+]$

$[H_3O^+] = \frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{F^-}}$

$= \frac{0,10}{35 + 5,5} = 2,469 mol/m^3$

Dans la relation $pH = -\log[H_3O^+]$; la concentration est mol/L.

$[H_3O^+] = 2,469 mol/m^3$

$= 2,469 mol/10^3 L$

$= 2,469.10^{-3} mol/L$

d'où: $pH = -\log(2,469.10^{-3}) = 2,607 \simeq 2,6$

7 La caféine est reconnue pour ses effets stimulants du système nerveux. Elle est présente dans le café, le thé et le maté, elle constitue la forme basique du couple noté BH^+/B.

A $25°C$, on mesure la conductivité d'un volume $V = 500mL$ d'une solution contenant initialement $n = 10mmol$ de caféine, on trouve $\sigma = 400\mu S.C.m^{-1}$.

La réaction entre la caféine et l'eau est modélisée par l'équation suivante:

$B + H_2O \rightleftarrows BH^+ + HO^-$.

On donne en $mS.m^{-2}.mol^{-1}$:

$\lambda_{HO^-} = 20$; et on néglige λ_{BH^+}.

1- Calculer la concentration en ions hydroxyde dans la solution.

2- Exprimer le taux d'avancement final τ en fonction de $[HO^-]$, n et V.

Calculer sa valeur et conclure.

3- Déterminer la composition molaire du mélange à l'état final.

Scanned with CamScanner

Solution

1- D'après le tableau d'avancement on a:

$[BH^+]=[HO^-]=\frac{x_f}{V}$;

alors: $\sigma=\lambda_{HO^-}.[HO^-]+\lambda_{BH^+}.[BH^+]$

$=(\lambda_{HO^-}+\lambda_{BH^+}).[HO^-]$

comme: $\lambda_{BH^+}<<<\lambda_{HO^-}$; $\sigma=\lambda_{HO^-}.[HO^-]$;

$[HO^-]=\frac{\sigma}{\lambda_{HO^-}}=\frac{400.10^{-6}.10^2}{20.10^{-3}}$

$=2mol/m^3$

$=2.10^{-3}mol/L$

$1\mu S=10^{-6}S$

$1cm=10^{-2}m$

$1cm^{-1}=10^2m^{-1}$

2- $x_f=n_f(HO^-)=[HO^-].V$ et $x_{max}=n$

alors:

$\tau=\frac{x_f}{x_{max}}=\frac{[HO^-].V}{n}$

$\tau=2.10^{-3}.\frac{500.10^{-3}}{10.10^{-3}}=0,1$

(réaction limitée)

3- $n_f(HO^-)=n_f(BH^+)=x_f$

$=\tau.n=1mmol=10^{-3}mol$

$n_f(B)=n-x_f=10-1=9mmol$

$=9.10^{-3}mol$

8 On étudie la dissociation de dioxyde d'azote en phase gazeuse modélisée par l'équilibre: $2NO_{2(g)}\rightleftarrows N_2O_{4(g)}$

On réalise cette réaction à $25°C$, et à volume constant, à partir d'une quantité initiale $n_0=50mmol$ de NO_2 pur.

A l'équilibre, la densité du mélange obtenu, par rapport à l'air est $d=2,47$.

On donne en $g.mol^{-1}$ les masses molaires: $M(air)=29$; $M(NO_2)=46$; $M(N_2O_4)=92$.

1- Trouver la valeur de x_e, avancement de la réaction à l'état d'équilibre.

2- En déduire la valeur du taux d'avancement final de cette réaction.

Solution

1-

	$2NO_{2(g)}\rightleftarrows N_2O_{4(g)}$	
Etat initial	n_0	**0**
Etat final (équilibre)	n_0-2x_e	x_e

Exprimons la masse molaire du mélange à l'équilibre:

$M=\%(NO_2).M(NO_2)+\%(N_2O_4).M(N_2O_4)$

Pourcentage d'un gaz dans un mélange:

$\%=\frac{n(gaz)}{n(totale)}$

$\%(NO_2)=\frac{n_e(NO_2)}{n_T}$;

$n_T=(n_0-2x_e)+x_e=n_0-x_e$

$\%(NO_2)=\frac{n_e.2x_e}{n_0-x_e}$

$\%(N_2O_4)=\frac{x_e}{n_0-x_e}$

$M=d.M_{air}=\frac{n_0-2x_e}{n_0-x_e}M(NO_2)+\frac{x_e}{n_0-x_e}M(N_2O_4)$

$d.M_{air}=\frac{1}{n_0-x_e}[46(n_0-2x_e)+92x_e]$

$71,63.(n_0-x_e)=46n_0$

$x_e=\frac{26,5.n_0}{71,63}=17,89mmol$

2- $\tau=\frac{x_e}{x_{max}}$, avec $x_{max}=\frac{n_0}{2}=25mmol$

On trouve: $\tau\simeq 71,5\%$.

3 ETAT D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME CHIMIQUE

I- Quotient de réaction:

Considérons une réaction chimique modélisée par l'équation

$$aA_{(aq)}+bB_{(aq)}\rightleftarrows cC_{(aq)}+dD_{(aq)}.$$

Par définition, on fait associer à cette équation le quotient de réaction, Q_r, à une date t de la transformation exprimé par: $Q_r=\frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$

Par convention:

- Le quotient de réaction est sans unité.
- $[A]$, $[B]$, $[C]$ et $[D]$ représentent les valeurs de concentrations à la date t divisées par une concentration de référence égale à $1mol.L^{-1}$.
- Cette expression fait intervenir uniquement les espèces dissoutes.
- Lorsqu'un réactif ou produit se trouve dans le mélange à l'état solide, on donne à sa concentration la valeur 1.

Lorsque le solvant intervient dans la transformation, on donne à sa concentration la valeur 1, $[H_2O]=1$.

II- Exemples:

$AH_{(aq)}+H_2O_{(\ell)}\rightleftarrows A^-_{(aq)}+H_3O^+_{(aq)}: Q_r=\frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$

$NaCl_{(s)}\xrightarrow{eau}Na^+_{(aq)}+C\ell^-_{(aq)}: Q_r=[Na^+][C\ell^-]$

$2Ag^+_{(aq)}+Zn_{(s)}\longrightarrow 2Ag_{(s)}+Zn^{2+}_{aq}: Q_r=\frac{[Zn^{2+}]}{[Ag^+]^2}$

III- Evolution du quotient de réaction:

1 Exemples:

Etudions la réaction qui se produit entre un acide et l'eau, lorsqu'on prépare une solution de cet acide de concentration molaire C et de volume V.

La température est constante $25°C$.

	$AH_{(aq)}+H_2O_{(\ell)}\rightarrow A^-_{(aq)}+H_3O^+_{(aq)}$			
Etat initial	$x=0$	excès	0	0
Etat intermédiaire	x	excès	x	x
Etat final: (Equilibre)	$x_f=x_e$	excès	x_e	x_e

Scanned with CamScanner

A l'état initial: $Q_{r,i} = 0$

- Entre l'état initial et l'état d'équilibre; $Q_r \nearrow$

La valeur de Q_r dans un état intermédiaire ne peut pas être déterminée (réaction rapide)

Calculons Q_r à l'état d'équilibre dans le cas de l'acide éthanoïque.

1ère cas: si $C = 10^{-1} mol.L^{-1}$, on mesure $pH = 3,4$. (à l'état final)

$[A^-]_{eq} = [H_3O^+]_{eq} = 10^{-pH}$

$[AH]_{eq} = C - 10^{-pH}$

$$Qr,éq = \frac{[A^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}{[AH]_{eq}} = \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}} = 1,65.10^{-5}$$

2ème cas: si $C = 510^{-3} mol$ on mesure $pH = 3,56$

$$Q_{r,\acute{e}q} = \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}} = 1,60\,10^{-5}$$

3ème cas: Si $C = 10^{-4}$ on mesure $pH = 3,92$

$$Q_{r,éq} = \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}} = 1,64.10^{-5}$$

2 Déduction:

Le quotient de réaction à l'état d'équilibre est constant. Sa valeur ne dépend pas des concentrations à l'état initial.

3 Autres exemples:

Si on reprend cette étude avec d'autres acides, on obtient

$C_6H_5COOH + H_2O \rightleftarrows C_6H_5COO^- + H_3O^+$; $Q_{r,éq} = 6.10^{-5}$

$NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+$; $Q_{r,éq} = 6,3.10^{-10}$

Conclusion

Lorsqu'un système chimique atteint son état d'équilibre (n'évolue plus), son quotient de réaction prend une valeur constante appelée constante d'équilibre.

III- Constante d'équilibre:

1 Définition:

La constante d'équilibre associée à l'équation d'une réaction chimique est égale au quotient de réaction à l'état d'équilibre. $K = Q_{r,éq}$

1 Propriétés:

- La constante d'équilibre ne dépend pas des concentrations à l'état initial.
- La constante d'équilibre ne peut varier qu'avec la température $K = f(T)$.

Sa valeur est liée à l'écriture de l'équation chimique;

Exemple: $AgCl_{(s)} \rightleftarrows Ag^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)}$; $K = [Ag^+]_{éq}[Cl^-]_{éq} = 10^{-10}$;

$$Ag^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)} \rightleftarrows AgCl_{(s)} : K' = \frac{1}{[Ag^+][Cl^-]} = \frac{1}{K} = 10^{10}$$

Exercices

1 On mélange $500mL$ d'une solution sulfate de plomb de concentration $4.10^{-3} mol.L^{-1}$ avec $500mL$ d'une solution S_2 d'iodure de potassium de concentration $4.10^{-3} mol.L^{-1}$. Il se forme un précipité d'iodure de plomb: $Pb^{2+}(aq) + 2I^-(aq) \rightleftarrows PbI_2(s)$.

La réaction est rapide. On détermine les concentrations en ions pb^{2+} et en ions iodure restant en solution.

On trouve:

$[Pb^{2+}] = 1,4.10^{-3} mol.L^{-1}$ et $[I^-] = 8.10^{-4} mol.L^{-1}$

1- Exprimer le quotient de réaction initial $Q_{r,initial}$, à l'instant du mélange des deux solutions.

- Calculer sa valeur.

2.1- Calculer la valeur du quotient $Q_{r,éq}$ de la réaction lorsque la réaction est achevée et l'état d'équilibre atteint.

2.2- En déduire la constante d'équilibre K de cette réaction.

2.3- La constante d'équilibre dépend-elle des concentrations initiales des deux réactifs? de la température?

3- Calculer le taux d'avancement τ de cette réaction lorsque l'équilibre est atteint.

Solution

1- $Q_r = \frac{1}{[Pb^{2+}].[I^-]^2}$

Lorsqu'un solide intervient dans une transformation, on ne peut pas exprimer sa concentration. La valeur 1 prend sa place dans l'expression du quotient de réaction. Il en est de même pour un solvant (comme l'eau).

$[Pb^{2+}] = \frac{C_1V_1}{V_{total}} = \frac{4.10^{-3} \times 500}{1000} = 2.10^{-3} mol.L^{-1}$;

$[I^-] = \frac{C_2.V_2}{V_{total}} = \frac{4.10^{-3} \times 500}{1000} = 2.10^{-3} mol.L^{-1}$

$Q_{ri} = \frac{1}{2.10^{-3} \times (2.10^{-3})^2} = 1,25.10^8$

2.1-

$Q_{r,éq} = \frac{1}{[Pb^{2+}]_{éq}.[I^-]^2_{éq}} = \frac{1}{1,4.10^{-3} \times (8.10^{-4})^2} = 1,1.10^9$

2.2- La constante d'équilibre de la réaction est égale au quotient de réaction à l'équilibre, soit $K = Q_{r,éq} = 1,1.10^9$.

2.3- La constante d'équilibre ne dépend pas des conditions initiales (quantité des réactifs entre autres), mais dépend de la température.

3- Etablissons le tableau descriptif, pour $1,0L$ de mélange.

Etat	avancement (mol)	$Pb^{2+} + 2I^- \rightleftarrows PbI_2$		
Initial	0	2.10^{-3}	2.10^{-3}	0
Intermédiaire	x	$2.10^{-3} - x$	$2.10^{-3} - 2x$	x

Scanned with CamScanner

équilibre	x_{eq}	$2.10^{-1} - x_{eq} = 1,4.10^{-1}$	$2.10^{-1} - 2x_{eq} = 0,80.10^{-1}$	x_{eq}
si réaction totale	$x_{max} = 10^{-1}$	$2.10^{-1} - x_{max}$	$2.10^{-1} - 2x_{max}$	x_{max}

Le taux d'avancement est $\tau = \frac{x_{eq}}{x_{max}}$

Calculons $x_{eq} = 2.10^{-1} - 1,4.10^{-1} = 0,6.10^{-1} mol$

Avec $x_{max} = 1,0.10^{-1} mol, \tau = \frac{0,6}{1,0} ; \tau = 60\%$

2 L'ammoniac est une base de brönsted, sa formule est NH_3.

On prépare une solution d'ammoniac de concentration $C = 9.10^{-2} mol/L$. La mesure de la conductivité de cette solution a donné la valeur $\sigma = 32,76 mS.m^{-1}$

On donne: $\lambda_+ = \lambda_{NH_4^+} = 7,3.10^{-3} S.m^2.mol^{-1}$

$\lambda_- = \lambda_{HO^-} = 20.10^{-3} S.m^2.mol^{-1}$

1- Ecrire l'équation de la réaction entre l'ammoniac et l'eau.

2- Quels sont les ions responsables de la conductivité de la solution.

3- En utilisant un tableau d'avancement de cette réaction, montrer que:

$$[HO^-] = \frac{\sigma}{\lambda_+ + \lambda_-}$$

4- Vérifier que cette concentration vaut: $1,2.10^{-3} mol/L$

5- Calculer le taux d'avancement final τ de cette réaction. Que peut-on conclure?

6- Montrer que la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction étudiée s'écrit: $K = \frac{C.\tau^2}{1-\tau}$

7- Calculer la valeur de K.

Le résultat est-il en accord avec celui de la question (4)?

Solution

1- $NH_{3(aq)} + H_2O_{(l)} \rightarrow NH_{4(aq)}^+ + HO_{(aq)}^-$

La conductivité de la solution est due aux ions ammonium NH_4^+ et ions hydroxyde HO^-.

3- Un tableau d'avancement permet de constater que: $x_f = n_f(HO^-) = n(NH_4^+)$; alors: $[NH_4^+]_f = [HO^-]_f$

La conductivité de la solution s'exprime alors de la façon suivante:

$\sigma = \sigma_f = \lambda_+ [NH_4^+]_f + \lambda_- \cdot [HO^-]_f$

$= (\lambda_+ + \lambda_-)[HO^-]_f$

D'où: $[HO^-] = \frac{\sigma}{\lambda_+ + \lambda_-}$

4- $[HO^-]_f = \frac{32,76.10^{-3}}{(7,3+20).10^{-3}} = 1,2 m/m^3$

$= 1,2.10^{-3} mol/L$

5- $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{[HO^-]V}{CV} = \frac{[HO^-]}{C}$

$\tau = \frac{1,2.10^{-3}}{9.10^{-2}} = 0,133$

La réaction n'est pas totale.

6- $K = Q_{r,éq} = \frac{[NH_4^+]éq[HO^-]éq}{[NH_3]éq}$

En revenant aux tableau d'avancement:

$[NH_3] = \frac{n_f(NH_3)}{V} = \frac{CV - x_f}{V} = C - \frac{x_f}{V}$

$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} \Longrightarrow x_f = x_{max} = CV.\tau$;

donc: $[NH_3] = C - C\tau = C(1-\tau)$

Et, $[NH_4^+] = [HO^-] = \frac{x_f}{V} = \frac{CV.\tau}{V} = C.\tau$;

alors: $K = \frac{C.\tau.C.\tau}{C(1-\tau)} = \frac{C.\tau^2}{1-\tau}$

7- $K = \frac{9.10^{-2}(0,133)^2}{1-0,133} \simeq 1,83.10^{-3}$

La valeur de la constante d'équilibre associée à cette réaction est très petite par rapport à -10^4. Ceci montre que la réaction est limitée, comme le prouve la valeur de τ calculée précédemment.

3 On prépare une solution aqueuse S de concentration molaire C et de volume V en introduisant une quantité de matière n d'un acide dans de l'eau distillée.

Dans la solution ainsi préparée, on a l'état final $[AH] = 4[A^-]$.

1- en vous aidant d'un tableau d'avancement de la réaction acide-base entre l'acide AH de l'eau; montrer que: $\frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1}{\tau} - 1$

2- en déduire la valeur de τ.

3- Déterminer la valeur du pH de la solution S. On donne $C=10^{-2} mol.L^{-1}$.

4- On ajoute à la solution S de l'eau distillée ; à la même température ; progressivement jusqu'à l'égalisation des concentrations $[AH]$ et $[A^-]$.

4.1 - Quelle est la valeur de τ' ; taux d'avancement final de la réaction précédente.

4.2- Exprimer la constante d'équilibre K associée à cette réaction et en déduire que: $C' = \frac{C}{10}$.

4.3- Calculer la variation de pH due à la dilution.

Solution

1- D'après le tableau d'avancement on a:

$\eta_f(A^-) = x_f$ et $\eta_f(AH) = CV - x_f$

$AH + H_2O \rightarrow A^- + H_3O^+$			
$\eta = CV$	excès	0	0
$\eta - x_f$	excès	x_f	x_f

Or: $\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$; avec $x_{max} = CV$

on a: $x_f = CV\tau$

Alors: $\frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{\frac{CV - x_f}{V}}{\frac{x_f}{V}} = \frac{CV - x_f}{x_f} = \frac{1}{\tau} - 1$

2- La condition $[AH] = 4[A^-]$, donne:

$\frac{1}{\tau} - 1 = 4$;

$\frac{1}{\tau} = 1 + 4 = 5$; d'où:

$\tau = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$

Scanned with CamScanner

3-

$pH = -\log[H_3O^+] = -\log\frac{x_f}{V} = -\log(C\tau)$

$pH = -\log 10^{-1}.0,2 \simeq 2,7$

4.1- Dans la solution S' on a: $[AH] = [A^-]$;

Alors: $\frac{[AH]}{[A^-]} = 1 = \frac{1}{\tau'} - 1$;

d'où: $\tau = 0,5 = 50\%$

4.2- Exprimons K pour la solution S:

$K = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} = \frac{C\tau}{\frac{[AH]}{[A^-]}}$

$K = \frac{C\tau}{\frac{1}{\tau} - 1} = \frac{C\tau^2}{1-\tau}$

Puisque la température n'a pas changé en passant de la solution S à la solution S', il en est de même pour la constante d'équilibre K: $K(S) = K(S')$

$C.\frac{\tau^2}{1-\tau} = C'.\frac{\tau'^2}{1-\tau'}$

$\frac{C'}{C} = \frac{\tau^2}{\tau'^2}.\frac{1-\tau'}{1-\tau}$

$= \left(\frac{0,2}{0,5}\right)^2.\frac{1-0,5}{1-0,2} = \frac{1}{10}$

La solution S a été diluée 10 fois.

4.3-

$\Delta pH = pH_{(S')} - pH_{(S)}$

$= -\log[H_3O^+]' + \log[H_3O^+]$

$= -\log.C'.\tau' + \log C.\tau$

$= \log\frac{C\tau}{C'.\tau'} = \log 4 = 0,6$

Au cours d'une dilution d'une solution d'acide, la valeur du pH augmente.

4 L'ammoniac NH_3 réagit avec le phénol; alcool de formule C_6H_5OH, pour donner des ions ammonium NH_4^+ et l'ion phénolate. On mélange $V = 20,0mL$ d'une solution d'ammoniac à $C = 0,040mol.L^{-1}$. avec $V' = 30,0mL$ d'une solution de phénol à $C' = 0,050mol.L^{-1}$.

1- Ecrire l'équation de cette réaction.

2- Déterminer les concentrations des réactifs dans le mélange à l'état initial.

3- On construit parfois le tableau d'avancement à l'aide des concentrations, dans ce cas on utilise l'avancement volumique défini par $\frac{x}{V}$ et noté x_V ou y.

Déterminer à l'équilibre, la valeur de l'avancement volumique x_V. On donne $Q_{r,eq} = 0,16$

4- En déduire la composition finale du système.

5- Quel est le taux d'avancement final de cette réaction?

Solution

1-

$NH_{3(aq)} + C_6H_5OH_{(aq)} \rightleftharpoons NH_{4(aq)}^+ + C_6H_5O_{(aq)}^-$

2-

$[NH_3]_i = \frac{C.V}{V+V'} = 1,6.10^{-2}mol.L^{-1}$

$[C_6H_5OH]_i = \frac{C'.V'}{V+V'} = 3,0.10^{-2}mol.L^{-1}$

3-

		$NH_{3(aq)} + C_6H_5OH_{(aq)} \rightleftharpoons NH_{4(aq)}^+ + C_6H_5O_{(aq)}^-$			
Etat initial $(mol.L^{-1})$	$x_i = 0$	$1,6.10^{-2}$	$3,0.10^{-2}$	0	0
Etat d'évolution $(mol.L^{-1})$	x_V	$1,6.10^{-2} - x_V$	$3,0.10^{-2} - x_V$	x_V	x_V

A l'équilibre:

$K = Q_{r,eq} = \frac{x_V^2}{(1,6.10^{-2} - x_V).(3,0.10^{-2} - x_V)}$

$= 0,16$

La résolution de l'équation du second degré correspondante conduit à deux solutions: $x_{V_1} = 6,1.10^{-3}mol.L^{-1}$

et: $x_{V_2} = -0,15mol.L^{-1}$.

Comme l'avancement $\frac{x}{V}$ est positif, x_{V_1} est la seule solution acceptable.

4- $[NH_4^+]_{éq} = [C_6H_5O^-]_{éq} = x_{V,éq}$;

$= 6,1.10^{-3}mol.L^{-1}$

$[NH_4^+]_{éq} = 1,6.10^{-2} - (x_V)_{éq}$

$\simeq 1,0.10^{-2}mol.L^{-1}$

et: $[C_6H_5OH]_{éq} = 3,0.10^{-2} - (x_V)_{éq}$

$\simeq 2,4.10^{-2}mol.L^{-1}$

5- $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{(x_V)_f}{(x_V)_{max}}$

$= \frac{6,1.10^{-3}}{1,6.10^{-2}} \simeq 0,38$

5 On prépare une solution aqueuse en introduisant dans de l'eau distillée une masse $m_1 = 115mg$ d'acide méthanoïque $HCOOH$ pur et une masse $m_2 = 410mg$ de cristaux d'éthanoate de sodium $NaCH_3COO_{(s)}$. Dans l'état d'équilibre, à 25°C, la conductivité σ de la solution obtenue vaut $973mS.m^{-1}$

Le volume de la solution est $V = 50,0mL$.

Données: à $25°C$, conductivités molaires ioniques en $S.m^2.mol^{-1}$:

$\lambda_{HCO_2^-} = \lambda_1 = 5,46 \times 10^{-3}$; $\lambda_{CH_3CO_2^-} = \lambda_2 = 4,09 \times 10^{-3}$; $\lambda_{Na^+} = \lambda_3 = 5,01 \times 10^{-3}$

$M_1 = M(HCO_2H) = 46g.mol^{-1}$; $M_2 = M(NaCH_3CO_2) = 82g.mol^{-1}$

1- Calculer les quantités de matière introduites; notées: n_1 pour l'acide méthanoïque et n_2 pour l'éthanoate de sodium.

2- L'éthanoate de sodium est très soluble dans l'eau. Ecrire l'équation de dissolution.

En déduire la quantité de matière des ions résultants.

3- Ecrire l'équation de réaction acido-basique entre l'acide méthanoïque $HCO_2H_{(aq)}$ et les ions éthanoate $(CH_3CO_2^-)_{(aq)}$.

Etablir son tableau d'avancement.

4- Exprimer la conductivité σ de la solution en fonction de l'avancement dans l'état d'équilibre, λ_1, λ_2, n_2 et V.

5- Justifier que la valeur $x_{éq}$ de l'avancement est égale à $2,30m\,mol$.

6- Déterminer à l'état d'équilibre, les concentrations effectives des espèces chimiques participant à la réaction.

7- Déterminer la constante d'équilibre associée à cette réaction.

Solution

1-

$n_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{115.10^{-3}}{46} = 2,5.10^{-3}mol$;

$n_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{410.10^{-3}}{82} = 5.10^{-3}mol$

2- $(NaCH_3OO)_s \rightarrow Na_{(aq)}^- + CH_3CO_{2(aq)}^-$

n_2		0	0
$n_1 - x_{max} = 0$		n_2	n_2

$n(Na^+) = n(CH_3CO_2^-) = n_2$

Scanned with CamScanner

3-

Equation		$HCO_2H(aq) + CH_3CO_2^-(aq) \longrightarrow HCO_2^-(aq) + CH_3CO_2H(aq)$			
Etat initial	$x = 0$	n_1	n_2	0	0
Etat final	$x = x_e$	$n_1 - x_e$	$n_2 - x_e$	x_e	x_e

4- Les ions présents dans la solution sont:

- Les ions méthanoate HCO_2^- formés
- Les ions éthanoate $CH_3CO_2^-$ restants
- Les ions sodium Na^+ indifférents vis-à-vis de la réaction..

Alors, l'expression de la conductivité est:

$\sigma = \lambda_1.[HCO_2^-]_{éq} + \lambda_2.[CH_3CO_2^-]éq + \lambda_3.[Na^+]éq$

D'après le tableau: $[HCO_2^-]éq = \frac{x_{éq}}{V}$ et $[CH_3CO_2^-]éq = \frac{n_2 - x_{éq}}{V}$

Les ions sodium Na^+ sont spectateurs: $[Na^+]éq = \frac{n(Na^+)}{V} = \frac{n_2}{V}$

D'où: $\sigma = \lambda_1.\frac{x_{éq}}{V} + \lambda_2\frac{n_2 - x_{éq}}{V} + \lambda_3.\frac{n_2}{V} = (\lambda_1 - \lambda_2).\frac{x_{éq}}{V} + (\lambda_2 + \lambda_3).\frac{n_2}{V}$

5- L'expression de σ permet d'écrire: $(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{x_e}{V} = \sigma - (\lambda_2 + \lambda_3)\frac{n_2}{V}$;

D'où: $x_{éq} = \frac{\sigma.V - (\lambda_2 + \lambda_3).n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$

$x_{éq} = \frac{0,973 \times 50,0 \times 10^{-6} - (4,09 + 5,01) \times 10^{-3} \times 5,00 \times 10^{-3}}{(5,46 - 4,09) \times 10^{-3}} = 2,30 \times 10^{-3} mol$

6- D'après le tableau: $[CH_3CO_2H]_{éq} = [HCO_2^-]_{éq}$

$[CH_3CO_2H]_{éq} = [HCO_2^-]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V} = \frac{2,30 \times 10^{-3}}{50,0 \times 10^{-3}} = 0,0460 mol.L^{-1}$

$[CH_3CO_2^-]_{éq} = \frac{n_2 - x_{éq}}{V} = \frac{5,00 \times 10^{-3} - 2,30 \times 10^{-3}}{50,0 \times 10^{-3}} = 0,0540 mol.L^{-1}$

$[HCO_2H]_{éq} = \frac{n_1 - x_{éq}}{V} = \frac{2,50 \times 10^{-3} - 2,30 \times 10^{-3}}{50,0 \times 10^{-3}} = 4,0 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$

7- $K = Q_{r,éq} = \frac{[HCO_2^-]_{éq}.[CH_3CO_2H]_{éq}}{[HCO_2H]_{éq}.[CH_3CO_2^-]_{éq}} = \frac{0,0460 \times 0,0460}{4,0 \times 10^{-3} \times 0,0540} = 9,8$

6 On dispose de plusieurs solutions aqueuses d'acide benzoïque de concentrations différentes.

Les mesures à $25°C$: de la conductivité σ de ces solutions, ont conduit aux résultats regroupés dans le tableau ci-après.

$C(mol/L)$	5.10^{-4}	$6,7.10^{-4}$	2.10^{-3}	$2,5.10^{-3}$	5.10^{-3}	10^{-2}
$\sigma(mS.m^{-1})$	**5,21**	**6,17**	**11,5**	**13,2**	**18,9**	**27,3**

On donne en: $(S.m^2.mol^{-1})$: $\sigma C_6H_5COO^- = 3,24.10^{-3}$, $\lambda H_3O^+ = 35.10^{-3}$

1- Ecrire l'équation de la réaction acido- basique ayant lieu entre l'acide benzoïque et l'eau.

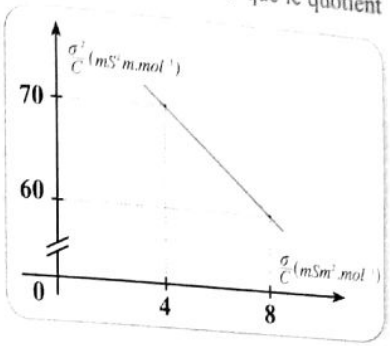
2- En utilisant un tableau d'avancement pour cette réaction; montrer que le quotient de réaction à l'état d'équilibre; associé à cette équation s'écrit sous la forme:

$$Q_{r,éq} = \frac{x_e^2}{V(CV - x_e)}$$

V: Volume de la solution et C sa concentration.

3- En déduire que: $K = C.\frac{\tau^2}{1 - \tau}$;

τ : taux d'avancement final et K constante d'équilibre associé à cette réaction.



4- Exprimer la conductivité σ de la solution; à l'état d'équilibre ; en fonction de C et τ et λ avec $\lambda = \lambda_{H_3O^+} + \lambda_{C_6H_5COO^-}$.

5- Etablir que: $\frac{\sigma^2}{C} = -K\lambda\left(\frac{\sigma}{C}\right) + K.\lambda^2$.

6- Les mesures précédentes ont permis d'obtenir le graphe de la figure ci-contre.

En exploitant ce graphe, trouver la valeur de K .

Solution

1-

$C_6H_5COOH_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \longrightarrow C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

2- Un tableau d'avancement permet d'obtenir à l'état final (état d'équilibre) les résultats suivants:

$[C_6H_5COO^-]_e = [H_3O^+]_e = \frac{x_e}{V}$

et: $[C_6H_5COOH]_e = \frac{C_V - x_e}{V} = C - \frac{x_e}{V}$

$Q_{r,éq} = \frac{[C_6H_5COO^-]_e}{[C_6H_5COOH]_e} = \frac{\left(\frac{x_e}{V}\right)^2}{C - \frac{x_e}{V}} = \frac{x_e^2}{V(CV - x_e)}$

3- Le taux d'avancement final est

$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{x_e}{CV}$; alors: $x_e = CV.\tau$

En tenant compte du fait que $K = Q_{r,éq}$; on peut écrire: $K = \frac{(CV\tau)^2}{V(CV - CV\tau)} = \frac{C.\tau^2}{1 - \tau}$

4- $\sigma = (\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{C_6H_5COO^-})[H_3O^+]$

$= \lambda.\frac{x_e}{V} = \lambda.C.\tau$

5- En tenant compte de cette expression, on écrit: $K = \frac{C.\tau^2}{1 - \tau} = \frac{C.\left(\frac{\sigma}{\lambda C}\right)^2}{1 - \frac{\sigma}{\lambda C}}$

$K - \frac{K.\sigma}{\lambda C} = \frac{\sigma^2}{\lambda^2 C}$

Ou bien: $\frac{\sigma^2}{C} = -K\lambda\left(\frac{\sigma}{C}\right) + K.\lambda^2$

6- Les variations de $\frac{\sigma^2}{C}$ en fonction de $\left(\frac{\sigma}{C}\right)$ est une droite affixe de pente:

$a = -K\sigma$

Par ailleurs, la constante de réaction d'un acide avec l'eau est égale à la constante d'acidité du couple de cet acide.

Scanned with CamScanner

Valeur de la pente:

$a = \frac{60-70}{4} = -2,5\,mS/m$

$\frac{a}{\lambda} = \frac{-2,5\,mS.m^{-1}}{38,24.10^{-3}\,S.m^2.mol^{-1}}$

$\simeq 6,5.10^{-2}\,mol/m^3$

La valeur de K n'est définie que lorsque le volume est exprimé en litre:

Alors: $\frac{a}{\lambda} = 6,5.10^{-2}.10^{-3}\,mol/L$

D'où: $K = \frac{a}{\lambda} = 6,5.10^{-5}$

7 On prépare une solution aqueuse de volume $V = 50mL$ en mélangeant une solution aqueuse d'acide méthanoique $HCOOH$; contenant $n_1 = 2,50mmol$ de cet acide et une solution aqueuse d'éthanoate de sodium $NaCH_3COO$ contenant $n_2 = 5,00mmol$ d'ions ethanoate $CH_3COO^-_{(aq)}$.

La réaction qui a eu lieu dans ce mélange a pour équation:

$HCOOH + CH_3COO^- \longrightarrow HCOO^- + CH_3COOH$

Données: $\lambda(CH_3COO^-) = 4,09.10^{-3}\,S.m^2.mol^{-1}$

$\lambda(Na^+) = 5,01.10^{-3}\,S.m^2.mol^{-1}$

$\lambda(HCOO^-) = 5,46.10^{-3}\,S.m^2.mol^{-1}$

La concentration en ions méthanoate sera noté $[M]$.

1- En utilisant un tableau d'avancement de la réaction étudiée, exprimer la concentration des ions éthanoate CH_3COO^-, à l'état final; en fonction de la concentration $[M]$ des ions méthanoate $HCOO^-$.

2- Etablir l'expression suivante: $\sigma = 0,910 + 1,37.10^{-3}.[M]$

3- La mesure de la conductivité de la solution à l'état donne $\sigma = 973mS.m^{-1}$

Calculer la concentration $[M]$ en ions méthanoate à l'état final.

4- Déterminer la constante d'équilibre K associée à la réaction étudiée.

Solution

	$HCOOH_{(aq)} + CH_3COO^-_{(aq)} \longrightarrow HCOO^-_{(aq)} + CH_3COOH_{(aq)}$				
Etat initial	$x = 0$	n_1	n_2	0	0
Etat intermédiaire	x	$n_1 - x$	$n_2 - x$	x	x
Etat final	x_f	$n - x_f$	$n_2 - x_f$	x_f	x_f

$n_f(HCOO^-) = \frac{x_f}{V}$ et: $n_f(CH_3COO^-) = n_2 - x_f$

Alors: $n_f(CH_3COO^-) = n_2 - n_f(HCOO^-)$

D'où: $[CH_3COO^-] = \frac{n_2}{V} - [HCOO^-]$

Ou bien: $[CH_3COO^-] = \frac{n_2}{V} - [M]$

Les ions de la solutions sont: $HCOO^-$, CH_3COO^- et les ions sodium Na^+ dont la concentration est constante. $[Na^+] = \frac{n_2}{V}$

2- $\sigma = \lambda_{CH_3COO^-}[CH_3COO^-] + \lambda_{Na^+}[Na^+] + \lambda_{HCOO^-}[HCOO^-]$

$= \lambda_{CH_3COO^-}\left(\frac{n_2}{V} - [M]\right) + \lambda_{Na^+}\frac{n_2}{V} + \lambda_{HCOO^-} - [M]$

$= \lambda_{CH_3COO^-}\frac{n_2}{V} + \lambda_{Na^+}\frac{n_2}{V} + (\lambda_{HCOO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}).[M]$

$= (\lambda_{CH_3COO^-} + \lambda_{Na^+})\frac{n_2}{V} + (\lambda_{HCOO^-} - \lambda_{CH_3COO^-}).[M]$

En utilisant le système international des unités où V est en m^3; on a:

$\sigma = (4,09 + 5,01)10^{-3}.\frac{5.10^{-3}}{50.10^{-6}} + (5,46 - 4,09).10^{-3}.[M]$

$\sigma = 0,910 + 1,37.10^{-3}[M]$

3- De la relation précédente on tire: $[M] = \frac{\sigma - 0,910}{1,37.10^{-3}} = \frac{0,973 - 0,910}{1,37.10^{-3}} = 46mol/m^3$

Soit en mol/L : $[M] = 4,6.10^{-2}mol/L$

4- $K = Q_{r,éq} = \frac{[HCOO^-][CH_3COOH]}{[CH_3COO^-][HCOOH]}$

$[CH_3COO^-] = \frac{n^2}{V} - [M] = \frac{5.10^{-3}}{50.10^{-3}} - 4,6.10^{-2} = 5,4.10^{-2}mol/L$

$[CH_3COOH] = [HCOO^-] = 4,6.10^{-2}mol/L$

$[HCOOH] = \frac{n_1 - x_f}{V} = \frac{n_1}{V} - [M] = \frac{2,5.10^{-3}}{50.10^{-3}} - 4.10^{-3}mol/L$

$K = \frac{(4,6.10^{-2})^2}{5,4.10^{-2}.4.10^{-3}} = 9,79 \simeq 9,8$

8 Dans les équations de réactions chimiques acide-base, les coefficients stoechiométriques sont égaux à un.

On modélise ces réactions par l'équation: $A_{1(aq)} + B_{2(aq)} \rightleftarrows B_{(aq)} + A_{2(aq)}$

A chacune de ces réactions est associée une valeur de la constante d'équilibre K qui lui est propre.

Toutes les solutions sont à la même température.

En considérant un mélange initial composé de $n_1(mol)$ de A_1 et $n_2(mol)$ de B_2 avec $(n_2 > n_1)$;

1- Montrer que: $K = \frac{n_1.\tau^2}{(1-\tau)(n_2 - n_1\tau)}$

Le volume V du mélange est constant.

2- Etablir lorsque le mélange initial est stoechiométrique en A_1 et B_2 que: $K = \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^2$.

3- Remplir alors le tableau suivant:

τ	0,5%	5%	10%	20%	50%	90%	98%	99%	99,1%	99,4%
K										

A partir de quelle valeur de K la réaction peut être considérée comme totale.

Scanned with CamScanner

Solution

1- Le tableau descriptif d'évolution de la réaction permet d'avoir: à l'équilibre $n_e(B) = n_e(A_2) = x_e$; $n_e(A_1) = n_1 - x_e$ et $n_e(B_2) = n_2 - x_e$;

$$K = \frac{[B]_e[A_2]_e}{[A_1]_e[B_2]_e} = \frac{\frac{x_e}{V}\cdot\frac{x_e}{V}}{\frac{n_1 - x_e}{V}\cdot\frac{n_2 - x_e}{V}}$$

$$= \frac{x_e^2}{(n_1 - x_e)(n_2 - x_e)}$$

$x_{max} = n_1$ car $n_1 < n_2$;

alors: $\tau = \frac{x_e}{n_1}$

donc: $x_e = \tau n_1$

D'où: $K = \frac{(\tau n_1)^2}{(n_1 - \tau n_1)(n_2 - \tau n_1)}$

$$= \frac{\tau^2 n_1}{(1-\tau)(n_2 - \tau n_1)}$$

2- Pour un mélange stoechiométrique où $n_2 = n_1$, la constante K l'exprime:

$K = \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^2$

3- En utilisant cette expression:

τ	1%	%	20%	50%	90%	97%	99%	99,1%	99,4%
K	10^{-4}	$1,7\,10^{-3}$	$6,2\,10^{-2}$	1	81	10^3	9800	$1,2\,10^4$	10^4	20.10^4

Une réaction acide-base, limitée peut être considérée comme réaction totale, lorsque sa constante est très grande.

Réaction quasi-totale ($\tau \geq 99\%$) $\Longleftrightarrow K \geq 10^4$.

9 L'acide formique ($HCOOH$) appelé officiellement acide méthanoïque est un liquide incolore miscible avec l'eau.

Sa masse molaire est $M = 46g.mol^{-1}$; et sa masse volumique est $\rho = 1,22g.mL^{-1}$.

1- On prépare une solution S_1 de concentration $C_1 = 5.10^{-2}mol.L^{-1}$, en dissolvant une masse m_1 d'acide methanoïque dans 100 mL d'eau distillée.

1.1- Déterminer la valeur de m_1.

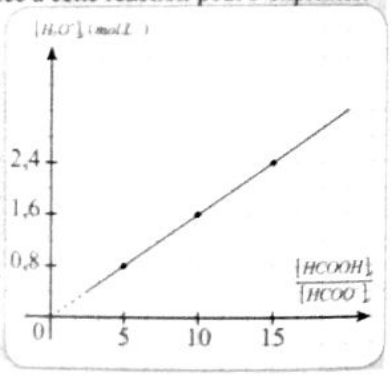
1.2- Ecrire l'équation de la réaction de l'acide méthanoïque avec l'eau et dresser le tableau descriptif de son avancement.

1.3- Montrer que la constante d'équilibre associée à cette réaction peut s'exprimer:

$$K = \frac{C_1\tau_1^2}{1-\tau_1}$$

τ_1 étant le taux d'avancement final de la réaction.

2- Une étude expérimentale a été menée sur des solutions d'acide methanoïque de concentrations différentes et à la même température 25°C, les résultats obtenus ont permis de tracer la courbe de la figure ci-contre. Les concentrations représentées sont obtenues à l'état d'équilibre



pour chacune des solutions étudiées:

2.1- Déterminer la valeur de la constante d'équilibre K.

2.2- Calculer τ_1.

3- On prend maintenant un volume: $V = 100mL$ de la solution S_1 et on y introduit un volume $v = 0,1mL$ d'acide méthanoïque pur, on obtient une solution S_2 de concentration molaire C_2 et de $pH = 2,42$.

3.1- Exprimer C_2 en fonction de C_1, V, v, ρ, τ_1 et M (on néglige v devant V).

3.2- Calculer τ_2 conclure.

Solution

1.1- $m = n.M = C_1.V.M = 5.10^{-2}.0,1.46 = 0,23g$

1.2-

		$HCOOH + H_2O \rightleftarrows HCOO^- + H_3O^+$			
Etat initial	$x = 0$	CV	excès	0	0
Etat d'équilibre	$x = x_f = x_e$	$CV - x_e$	excès	x_e	x_e

1.3- $K = Q_{r\,eq} = \frac{[HCOO^-]_e[H_3O^+]_e}{[HCOOH]_e}$;

$[HCOO^-]_e = [H_3O^+]_e = \frac{x_e}{V}$;

$$= \frac{\tau x_{max}}{V} = C\tau$$

$[HCOOH]_e = \frac{CV - x_e}{V} = C - \frac{x_e}{V}$.

$= C - C.\tau = C(1-\tau)$

On obtient: $K = \frac{C\tau^2}{1-\tau}$ et pour S_1 on écrit:

$K = \frac{C_1.\tau_1^2}{1-\tau_1}$.

2.1- La valeur de la constante K associée à une équation de réaction ne dépend que de la température, et elle est indépendante des concentrations. Il en résulte que les états d'équilibre des différentes solutions d'acide méthanoïque sont caractérisés par la même valeur de K.

L'expression: $K = \frac{[HCOO^-]_e[H_3O^+]_e}{[HCOOH]_e}$

donne: $[H_3O^+]_e = K.\frac{[HCOOH]_e}{[HCOO^-]_e}$

Où K est la pente de la droite donnée sur la figure;

On trouve: $K = 1,6.10^{-4}$

2.2- La relation $K = \frac{C.\tau_1^2}{1-\tau_1}$ donne:

$C\tau_1^2 + K.\tau_1 - K = 0$

Cette équation admet comme solution:

$\tau_1 = \frac{K \pm \sqrt{K^2 + 4C_1K}}{2C_1} \simeq 5,5\%$.

4.1- La quantité supplémentaire d'acide méthanoïque introduite dans le volume V est: $n' = \frac{m}{M} = \frac{\rho.v}{M}$.

- Ce volume contient déjà la quantité restante à l'équilibre précédent qui est:

$n_{1,e} = C_1(1-\tau_1)V$.

- La quantité de matière totale d'acide méthanoïque dans ce nouvel état initial est donc:

Scanned with CamScanner

$$n_2 = n_{e1} + n'$$
$$= C_1(1-\tau_1)V + \frac{\rho v}{M}$$

- Selon la définition d'une concentration, on a pour S_2 :

$$C_2 = \frac{n_2}{V} = C_1(1-\tau_1) + \frac{\rho.v}{M.V}$$

On trouve: $C_2 = 7,4.10^{-2} mol.L^{-1}$

4.2- $\tau_2 = \frac{[H_3O^+]_2}{C_2} = \frac{10^{-pH_2}}{C_2}$

$$= \frac{10^{-2,4}}{7,4.10^{-2}} = 4,7\%$$

On remarque que $\tau_2 < \tau_1$ alors que $C_2 > C_1$.

Le taux d'avancement varie inversement avec la concentration.

4 RÉACTIONS ASSOCIÉES À DES RÉACTIONS ACIDE-BASE EN SOLUTION AQUEUSE

I- Produit ionique:

1 Autoprotolyse de l'eau:

A 25°C, le pH de l'eau pure est égal à 7,0.

L'eau contient donc des ions oxoniums H_3O^+ ; et $[H_3O^+] = 10^{-7} mol.L^{-1}$

En plus, la mesure de conductivité de l'eau pure donne la valeur: $\sigma = 5,5 \mu S.m^{-1}$.

L'existence des ions contenus dans l'eau est due à la réaction suivante:

$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + HO^-$;

appelée autoprotolyse de l'eau.

Elle est très limitée $(\tau \simeq 3,6.10^{-9})$

2 Produit ionique de l'eau:

La constante d'équilibre associée à l'autoprotolyse de l'eau notée K_e:

$K_e = [H_3O^+].[HO^-] = 10^{-14}$ à $25°C$

On définit le nombre $pK_e = -\log K_e$

- à $25°C$: $pK_e = 14$;
- à $60°C$: $K_e = 10^{-13}$ et $pK_e = 13$

La valeur de la constante K_e ne dépend que de la température, et par conséquent:

Dans toutes les solutions aqueuses à $25°C$:

$$K_e = [H_3O^+].[HO^-] = 10^{-14}$$

3 Exemples:

Exemple (1): Dans une solution aqueuse de $pH = 2,6$; on a:

$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2,6} = 2,5 mol.L^{-1}$;

$[HO^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{2,5} \simeq 4.10^{-12} mol.L^{-1}$

Exemple (2):

Calculons le pH d'une solution aqueuse où la concentration en ions hydroxyde vaut $5.10^{-3} mol.L^{-1}$, sachant que $K_e = 10^{-14}$

$pH = -\log[H_3O^+] = -\log\frac{10^{-14}}{[HO^-]} = 14 + \log[HO^-] = 11,6$

Scanned with CamScanner

II- Constante d'acidité:

1 **Définition:**

La constante d'acidité d'un couple acide-base A/B est la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction de l'acide A avec l'eau;

$$A_{(aq)} + H_2O \rightleftharpoons B(aq) + H_3O^+_{(aq)}$$

$$K_A = \frac{[B][H_3O^+]}{[A]}$$

- On utilise souvent le nombre $pK_A = -\log K_A$

Exemples:

	Couple A/B	CH_3COOH/CH_3COO^-	NH_4^+/NH_3	H_3O^+/H_2O	H_2O/HO^-
à 25°C	pK_A	4,78	9,2	0	14
	K_A	$1,66.10^{-5}$	$6,3.10^{-10}$	1	10^{-14}

2 **Propriétés:**

- La valeur de K_A et celle de pK_A caractérisent le couple
- La constante d'acidité en tant que constante d'équilibre ne dépend que de la température, et par conséquent l'expression de la constante d'acidité est valable dans toute solution aqueuse contenant le couple A/B.

Exemple: Le sérum sanguin est une solution aqueuse complexe qui contient plusieurs couples acide-base parmi lesquels on trouve le couple: H_2CO_3/HCO_3^- de $pK_A = 6,3$

Le pH du sérum est 7,4.

On peut écrire: $K_A = 10^{-6,3} = \frac{[H.CO_3^-].[H_3O^+]}{[H_2CO_3]}$

$[H_3O^+]$: concentration des ions H_3O^+ dans le sérum

3 **Relation pH, ApK_A et concentrations:**

L'expression de K_A peut s'écrire:

$$K_A = 10^{-pK_A} = [B].[H_3O^+] = \frac{[B]}{[A]}.10^{-pH}$$

D'où: $10^{pH-pK_A} = \frac{[B]}{[A]}$

et: $pH - pK_A = \log\frac{[B]}{[A]}$

Dans une solution aqueuse contenant un couple A/B; la valeur du rapport $\frac{[B]}{[A]}$ est imposée par celle du pH de la solution.

Exemple (1): On considère une solution d'acide fluorhydrique HF de $pH = 3,9$

- Le pK_A du couple (HF/F^-) est 3,2.

Dans cette solution: $\frac{[F^-]}{[HF]} = 10^{pH-pK_A} = 10^{3,9-3,2} = 5$

Exemple (2): Une solution aqueuse contient le couple NH_4^+/NH_3 de $pK_A = 9,2$

- Quel doit être le pH de cette solution pour avoir $[NH_4^+] = [NH_3]$?
- on utilise dans ce cas l'expression.

$$pH = pK_A + \log\frac{[B]}{[A]}$$

$$pH = 9,2 + \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]} = 9,2 + \log\frac{1}{10^0} = 9,2$$

III- Comparaison des acides et comparaison des bases.

1 **Force des acides:**

La force d'un acide traduit sa capacité de céder un proton.

Un acide est d'autant plus fort lorsque:

- La concentration en H_3O^+ est élevée
- le pH est faible
- le taux d'avancement final est élevé.
- la constante d'acidité du couple est élevée;
- le pK_A est faible.

$HA + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$		
CV	0	0
$CV(1-\tau)$	$CV.\tau$	$CV.\tau$
$K_A = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} = C.\frac{\tau^2}{1-\tau}$		
$K_A \nearrow$ lorsque $[H_3O^+] \nearrow$ et $\tau \nearrow$		

2 **Force des bases:**

La force d'une base traduit sa capacité de fixer un proton.

Exprimons la constante d'équilibre associée à la réaction de la base B avec l'eau, en fonction de τ et de la constante d'acidité K_A du couple BH^+/B.

Une base est d'autant plus forte lorsque:

- $[HO^-]$ est élevée et pH est grand;
- Le taux d'avancement final est élevé;
- La constante d'acidité du couple est faible.

$B + H_2O \rightleftharpoons BH^+ + HO^-$		
CV	0	0
$CV(1-\tau)$	$CV.\tau$	$CV.\tau$
$K_A = \frac{[BH^+][Ho^-]}{[B]} = \frac{CV.\tau/V.CV\tau/V}{CV(1-\tau)} = \frac{C.\tau^2}{1-\tau}$		
$K = \frac{[HO^-].[H_3O^+]}{\frac{[B].[H_3O^+]}{[BH^+]}} = \frac{K_e}{\frac{[B].[H_3O^+]}{[BH^+]}} = \frac{K_e}{K_A}$		
$K = \frac{K_e}{K_A} = \frac{C.\tau^2}{1-\tau}$ $\tau \nearrow \Longrightarrow K \nearrow \Longrightarrow K_A \searrow \Longrightarrow pK_A \nearrow$		

3 **Conclusion:**

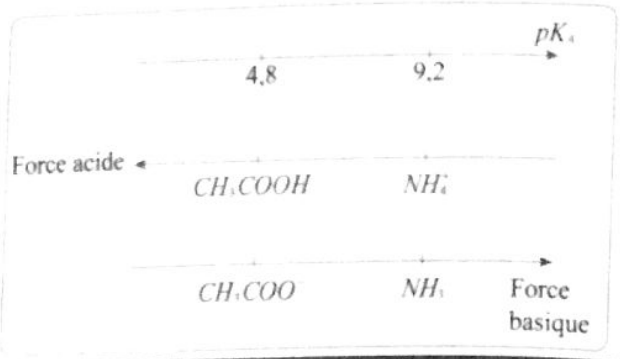
Lorsque pK_A diminue, la force d'un acide augmente et celle de sa base conjuguée diminue.

4 **Exemple:**

Soit les couples: CH_3COOH/CH_3COO^- de $pK_A = 4,8$

NH_4^+/NH_3 de $pK_A = 9,2$

Scanned with CamScanner



IV- Action d'un couple acide-base sur un autre

Considérons l'équation suivante $A_1 + B_2 \rightleftarrows B_1 + A_2$

La constante d'équilibre qui lui est associée s'écrit :

$$K = \frac{[B_1][A_2]}{[A_1][B_2]} = \frac{[B_1][H_3O^+]}{[A_1]} \cdot \frac{[A_2]}{[B_2][H_3O^+]} = \frac{K_{A_1}}{K_{A_2}} = 10^{pK_{A_2} - pK_{A_1}}$$

Cette réaction est quasi-totale ($\tau \simeq 1$) :

lorsque $\Delta pK_A = pK_{A_2} - pK_{A_1} \geqslant 4$

Elle est limitée PK_A et pK_{A_1} ont des valeurs relativement proches.

V - Prédominance d'un acide et d'une base d'un couple

1 Diagramme de prédominance:

A l'aide de la relation $pH = pK_A + \log\left(\frac{[B]}{[A]}\right)$, on établit le diagramme de prédominance figure 1:

- Pour $pH = pK_A$, l'acide et la base conjugués ont la même concentration.
- Pour $pH < pK_A$, $[A] > [B]$, l'acide A prédomine. Le domaine de pH défini par $pH < pK_A$ est donc le domaine de prédominance de l'acide A.
- pour $pH > pK_A$, $[B] > [A]$, la base B prédomine, le domaine de pH défini par $pH > pK_A$ est donc le domaine de prédominance de la base B.

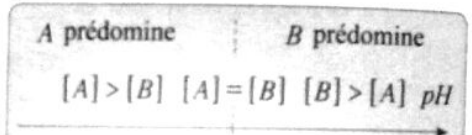


Figure 1 - Diagramme de prédominance

2 Diagramme de distribution:

Un diagramme de distribution présente les pourcentages des espèces acide A et base B conjuguées en fonction du pH.

Lorsque les deux pourcentages s'égalisant: $p(A) = p(B) = 50\%$ alors $[A] = [B]$

et $pH = pK_A$

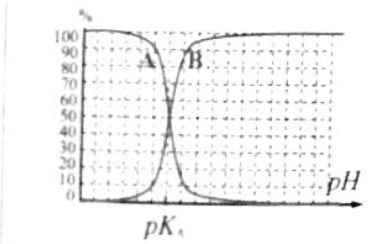


Figure 2 - Diagramme de prédominance

$$\%A = p(A) = \frac{[A]}{[A]+[B]} = \frac{1}{1 + 10^{(pH - pK_A)}}$$

$$\text{Et } \%B = p(B) = \frac{[B]}{[A]+[B]} = \frac{1}{10^{(pK_A - pH)} + 1}$$

VI - Les indicateurs colorés

1 Définition:

Les indicateurs colorés sont des couples acide-base particuliers pour lesquels la forme acide et la forme basique n'ont pas la même teinte (couleur) en solution aqueuse.

On a les symboles par le couple HIn / In

Exemple : le bleu de bromothymol :

La forme acide : jaune

La forme basique In : bleue

2 Zone de virage:

- Considérons que la teinte basique d'un indicateur domine dans la solution lorsque

$$[In] \geqslant 10[HIn] \; ; \; \frac{[B]}{[A]} = 10^{pH - pK_A}$$

$$\frac{[In]}{[HIn]} = 10^{pH - pK_A} \geqslant 10$$

$$pH - pK_A \geqslant 1$$

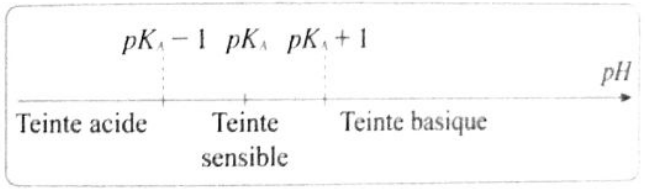
$$pH \geqslant pK_A + 1$$

Lorsque la solution prend la couleur de la forme acide.

$$\frac{[HIN]}{[In]} = 10^{pK_A - pH} \geqslant 10$$

$$pK_A - pH \geqslant 1$$

$$pH \leqslant pK_A - 1$$



Dans la pratique, la zone de virage d'un indicateur coloré est déterminée par l'expérience

Exemples:

Nom de l'indicateur	*Teinte acide*	*Zone de virage*	*Teinte basique*
Héliantine	Rouge	3,1 – 4,4	Jaune
Bleu de bromothymol	Jaune	6 – 7,6	Bleu
Phénolphtaléine	Rose	8,2 – 10	Incolore

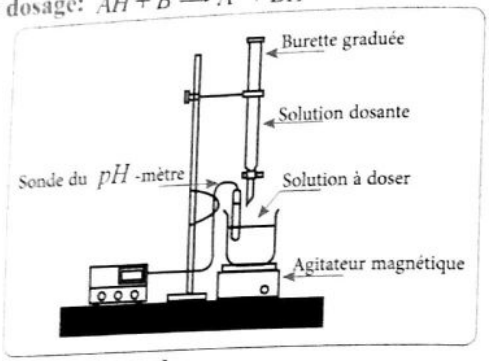
Scanned with CamScanner

VII - Dosage acide-base par suivi du pH

1 Rappel:

Le dosage acide-base permet de déterminer la concentration inconnue d'un acide ou d'une base en solution aqueuse.

2 Réaction du dosage: $AH + B \longrightarrow A^- + BH^+$



3 Propriétés de la réaction de dosage:

La réaction d'un dosage doit être:

- rapide: cette condition est vérifiée par une réaction acide-base.
- totale: Son taux d'avancement final tend vers 1.

Cette condition est vérifiée lorsque $\Delta pK_A \geqslant 4$

- Sélective: elle doit se faire uniquement entre l'espèce dosante et l'espèce à doser.

4 Equivalence d'un dosage:

A l'équivalence les deux réactifs limitent la réaction.

$C_A - V_A - x_E = 0$ et $C_B V_B - x_E = 0$

Si l'espèce à doser est l'acide : on écrit: $C_A V_A = C_B V_{BE}$

V_{BE} : Volume qu'il faut verser pour neutraliser l'acide (point d'équivalence)

	$AH + B \rightarrow A^- + BH$			
0	$n_i(AH) = C_A V_A$	$n_i(B) = C_B V_B$	0	0
x_f	$C_A V_A - x_f$	$C_B V_B - x_f$	x_f	x_f

5 Dosage d'un acide:

La solution S_A dosante est une solution de soude $(Na^+ + HO^-)$ ou une solution de potasse $(K^+ + HO^-)$.

1ère cas: Si l'acide à doser est totalement dissocié comme HCl, HBr, HNO_3; sa concentration est $C_A = [H_3O^+]$

L'équation de la réaction du dosage est: $H_3O^+ + HO^- \longrightarrow 2H_2O$ (figure 1)

A l'équivalence, le milieu est neutre car les ions H_3O^+ issus de S_A et les ions HO^- issus de S_B sont neutralisés.

Si l'acide à doser est très faiblement dissocié dans l'eau.

On se place dans les cas où la réaction entre l'acide à doser et l'eau est négligeable, afin que les ions HO^- réagissent uniquement avec l'acide de AH à doser (réaction sélective):

$$AH + HO^- \longrightarrow A^- + H_2O \quad (2)$$

On néglige les ions H_3O^+ dus à la réaction de l'acide AH et l'eau.

A l'équivalence, le milieu est basique, ce caractère est imposé par la base A^-.

6 Dosage d'une base:

La solution dosante est $(H_3O^+ + Cl^-)$

1er cas: base totalement transformée en HO^-.

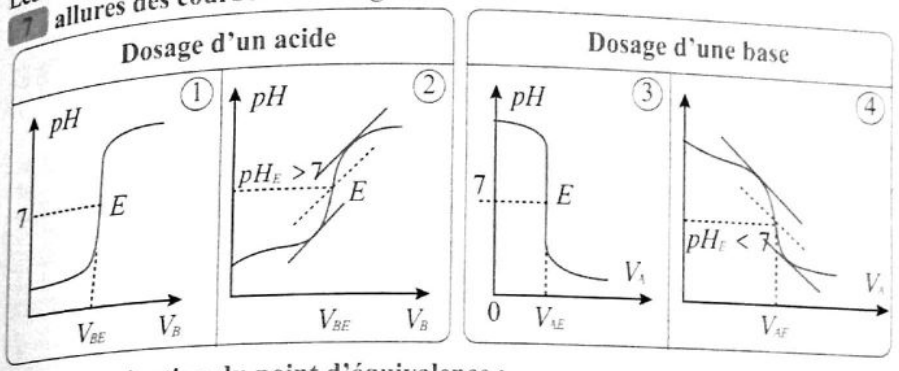
Equation de la réaction du dosage: $H_3O^+ + HO^- + 2H_2O$ (3)

2ème cas: base B très faiblement dissociée dans l'eau

$$H_3O^+ + B \longrightarrow H_2O + BH^+ \quad (4)$$

Les ions HO^- sont négligés devant B.

7 allures des courbes du dosage:



8 Détermination du point d'équivalence :

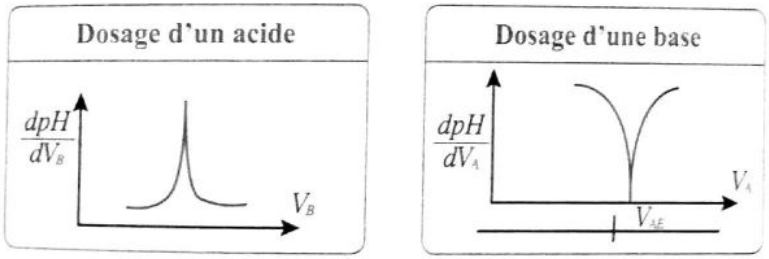
- Méthode des tangentes: on trace deux tangentes parallèles à la courbe $pH = f(v)$, et on trace une droite équidistance de ces deux tangentes. Cette droite coupe la courbe au point d'équivalence.

- Méthode de la dérivée

A l'aide d'un logiciel tableur on peut représenter les variations de $\frac{dpH}{dV} = f(v)$

Au point d'équivalence, la dérivée est maximale ou minimale.

La figure obtenue présente un pic au point d'équivalence.



Cette méthode ne permet pas de déterminer le pH à l'équivalence.

- Utilisation d'un indicateur coloré: l'indicateur convenable est celui dont la zone de virage contient la valeur pH_E.

Scanned with CamScanner

Exercices

1 Dans une solution aqueuse les ions hydroxyde sont cent fois plus concentrés que les ions oxonium.

Calculer le pH de cette solution.

On donne $pKe = 14$

Solution

On a selon les données:

$[HO^-] = 100[H_3O^+]$ et

$[H_3O^+][HO^-] = Ke$;

Il vient: $100[H_3O^+][H_3O^+] = Ke = 10^{-14}$

$[H_3O^+]^2 = \frac{Ke}{100} = 10^{-16}$

$[H_3O^+] = 10^{-8} mol/L$

$pH = -\log[H_3O^+] = 8$

2 Un acide AH ne réagit pas totalement avec l'eau.

1- Une solution de l'acide AH de concentration $C = 10^{-2} mol.L^{-1}$ a un pH égal à l'une des trois voleurs suivantes. Laquelle ?

a: 1,5 b: 2 c: 2,8

2- Déterminer le pK_A du couple AH/A^-

Solution

1- L'acide AH réagit avec l'eau selon l'équation:

$AH_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftharpoons A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$

La quantité de matière formée en H_3O^+ :

$n(H_3O^+) < n_i(AH) = CV$

$[H_3O^+] < C$

$10^{-pH} < C$

$-pH < \log C$

$pH > -\log C = -\log 10^{-2}$

$pH > 2$

$pH = 2,8$

2-

$K_A = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} = \frac{[H_3O^+]}{C - [H_3O^+]} = \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}}$

$pK_A = -\log K_A = -\log \frac{10^{-2pH}}{C - 10^{-pH}}$

$pK_A = -\log \frac{10^{-5,6}}{10^{-2} - 10^{-2,8}} \simeq 3,52$

3 Parmi les constituants d'une solution aqueuse de $pH = 5,4$; on trouve parmi d'autres l'acide éthanoïque CH_3COOH à 6mmol et les ions éthanoate à 1,5mmol. Quelle est la valeur de pK_A du couple acide/base formé par ces deux espèces?

Solution

$pK_A = pH - \log \frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} = pH - \log \frac{6/V}{1,5/V} = pH - \log 4$

$pK_A = 4,79 \approx 4,8$

4 On dispose d'une solution aqueuse d'ammoniac NH_3, de concentration $C = 1,0.10^{-1} mol.L^{-1}$. Son pH vaut 11,1.

1- Ecrire l'équation de la réaction de l'ammoniac avec l'eau.

2- Montrer que cette réaction est limitée.

3- Calculer les concentrations de toutes les espèces chimiques en solution.

On donne $Ke = 10^{-14}$.

Solution

1- $NH_{3(aq)} + H_2O \rightleftharpoons NH_{4(aq)}^+ + HO^-_{(aq)}$

2- $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{n(HO)^-}{CV} = \frac{[HO^-]}{C}$

$= \frac{Ke}{[H_3O^+].C} = \frac{10^{pH-pK_e}}{C}$

$\tau = \frac{10^{11,1-14}}{10^{-1}} = 1,26.10^{-2} = 1,26\%$

$= 1,3\%$

3- $[H_3O^+] = 10^{-11,1} \simeq 7,9.10^{-12} mol.L^{-1}$

4-

$[NH_4^+] = [HO^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = 10^{pH-14}$

$= 1,3.10^{-3} mol.L^{-1}$

$[NH_3] = \frac{CV - x_f}{V} = C - [HO^-]$

$[NH_3] \simeq 9,9.10^{-2} mol.L^{-1}$

5 Sur la figure ci-contre, sont représentés les pourcentages des ions ammonium NH_4^+ et le pourcentage de l'ammoniac NH_3 en fonction du pH de solutions aqueuses contenant ces deux espèces.

1- Comment appeler cette figure?

2- Attribuer chaque courbe à l'espèce qui lui correspond.

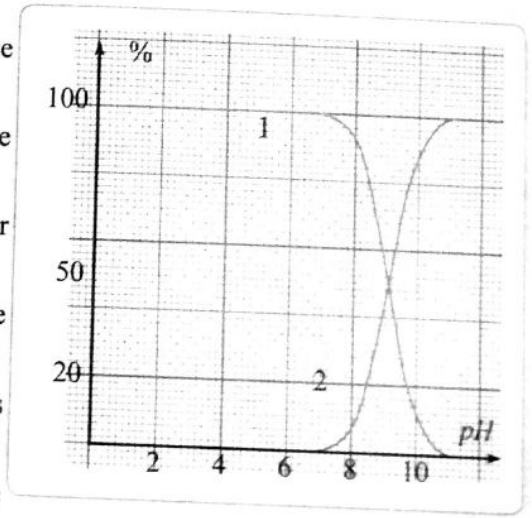
3- Donner la valeur du pH lorsque les deux courbes se croisent.

Que représente cette valeur particulière pour le couple étudié?

4- On considère une solution aqueuse de $pH = 8$

4.1- Quelle espèce prodomine dans cette solution NH_4^+ ou NH_3 ?

4.2- En utilisant une méthode de calcul, justifier la valeur de pK_A du couple NH_4^+/NH_3



Scanned with CamScanner

Solution

1- Le diagramme de distribution de l'acide et de sa base conjuguée.

2- Pour les faibles valeurs de pH c'est l'acide qui prédomine. Et la courbe 1 correspond à l'acide NH_4^+ et 2 correspond à la base NH_3.

3- $pH = 9,2$, $\%(NH_4^+) = \%(NH_3)$

Alors $[NH_4^+] = [NH_3]$

$K_A = \dfrac{[NH_3]}{NH_4^+}[H_3O^+] = [H_3O^+]$

$pK_A = pH = 9,2$

4.1- $pH = 8 < pK_A$, c'est l'acide NH_4^+ qui prédomine

4.2- $pK_A = pH - \log\dfrac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$

$= pH + \log\dfrac{[NH_4^+]}{[NH_3]}$

$\dfrac{[NH_4^+]}{[NH_3]} = \dfrac{p(NH_4^+)}{p(NH_3)} = \dfrac{94}{6}$

$pK_A = +\log\dfrac{94}{6} \simeq 9,2$

6 Dans un bécher, on mélange un volume $V_A = 20mL$ d'une solution d'acide chlorhydrique $(H_3O_{aq}^+ + Cl_{aq}^-)$ de concentration $C_A = 5.10^{-2}mol.L^{-1}$ et un volume $V_B = 30mL$ d'une solution d'hydroxyde sodium $(Na_{aq}^+ + HO_{aq}^-)$ de concentration $C_B = 4.10^{-2}mol.L^{-1}$.

On donne: $Ke = [H_3O^+].[HO^-] = 10^{-14}$

1- Ecrire l'équation de la réaction entre les ions oxonium et les ions hydroxyde.

2- En utilisant un tableau d'avancement pour cette réaction, considérée comme totale; déterminer la composition du mélange.

3- En déduire le pH de ce mélange.

Solution

1-

		$H_3O_{(aq)}^+ + HO_{(aq)}^- \longrightarrow 2H_2O$		
Etat initial	$x = 0$	C_aV_a	C_bV_b	excès
Etat intermédiaire	x	$C_aV_a - x$	$C_bV_b - x$	excès
Etat final	$x_f = x_{max}$	$C_aV_a - x_{max}$	$C_bV_b - x_{max}$	excès

2- La composition finale est:

$n_f(Na^+) = C_bV_b = 1,2.10^{-3}mol$;

$n_f(Cl^-) = C_aV_a = 1.10^{-3}mol$

$C_aV_a < C_bV_b \rightarrow x_{max} = C_aV_a = 1.10^{-3}mol$;

H_3O^+ réactif limitant

$n_f(HO^-) = C_bV_b - x_{max} = C_bV_b - C_aV_a =$

$= 2.10^{-4}mol$

Les ions H_3O^+ provenant de la solution S_a sont totalement consommés, mais dans le mélange $[H_3O^+]$ n'est pas nulle.

3-

$[H_3O^+] = \dfrac{10^{-14}}{[HO^-]} = \dfrac{10^{-14}}{2.10^{-4}} = 5.10^{-11}\ mol/\ell$

$pH = -\log[H_3O^+] = -\log(5.10^{-11}) = 10,3$

7 Le méthanoate de sodium $(NaHCOO)$ est un sel très soluble dans l'eau.

On dispose d'une solution de méthanoate de sodium de concentration $C = 4.10^{-2}mol.L^{-1}$.

La valeur de son pH, mesurée à l'aide d'un pH-mètre est $pH = 8,2$

1- Quels sont les ions obtenus à l'issue de cette dissolution?

2- Lequel de ces ions est responsable de l'augmentation du pH de 7 à 8,2?

3- Ecrire l'équation de réaction à l'origine de ce phénomène.

4- A l'aide d'un tableau d'avancement, déterminer les concentrations de toutes les espèces chimiques en solution.

5- Vérifier que cette réaction est limitée.

6- Quel est le pK_A du couple acide méthanoïque / ion méthanoate?

Solution

1- $(NaHCOO)_s \xrightarrow{eau} Na_{(aq)}^+ + HCOO_{(aq)}^-$

2- Avant d'introduire ce composé, le pH est celui de l'eau pure $pH = 7$ l'ion sodium Na^+ est indifférent, c'est donc l'ion méthanoate qui, par sa réaction avec l'eau a entraîné cette variation.

3- $pH \nearrow \Longrightarrow [H_3O^+] \searrow \Longrightarrow [HO^-] \nearrow$

Les ions HO^- sont formés.

$HCOO_{(aq)}^- + H_2O_{(\ell)} \longrightarrow HCOOH_{(aq)} + HO_{(aq)}^-$

4- Les espèces chimiques sont : $HCOOH$, HO^-, $HCOO^-$ restant et H_3O^+

$[H_3O^+] = 10^{-8,2} = 6,3.10^{-9}mol.L^{-1}$;

$[HO^-] = \dfrac{Ke}{[H_3O^+]} = 1,58.10^{-6}mol.L^{-1}$;

$[HCOOH] = \dfrac{x_f}{V} = [HO^-] = 1,58.10^{-6}mol.L^{-1}$

$[HCOO^-] = C - \dfrac{x_f}{V} = C - [HO^-]$

$\simeq 4.10^{-2}mol.L^{-1}$

5- On peut comparer x_f à x_{max}, c'est à dire $[HO^-]$ à C ou bien calculer τ.

On a bien $[HO^-] < C$, la réaction est donc limitée.

Ou encore

$\tau = \dfrac{[HO^-]}{C} = \dfrac{1,58.10^{-6}}{4.10^{-2}} \simeq 4.10^{-5} \ll 1$

6-

$pK_A = -\log K_A = -\log\dfrac{[HCOO^-][H_3O^+]}{[HCOOH]}$

$pK_A = -\log\left(\dfrac{4.10^{-2}.6,3.10^{-9}}{1,58.10^{-6}}\right) \simeq 3,8$

Ou bien :

$pK_A = pH - \log\dfrac{[HCOO^-]}{[HCOOH]} = 8,2$

$-\log\left(\dfrac{4.10^{-2}}{1,58.10^{-6}}\right) \simeq 3,8$

8 Un chimiste prépare une solution aqueuse S_0 d'acide éthanoïque CH_3CO_2H de concentration molaire $C_0 = 1,00mmol.L^{-1}$

Il mesure ensuite la conductivité σ_0 de cette solution et il trouve $46\mu S.cm^{-1}$.

Scanned with CamScanner

Données: conductivités molaires ioniques $\lambda(H_3O^+) = 35,0 mS.m^2.mol^{-1}$; $\lambda(CH_3CO_2^-) = 4,1 mS.m^2.mol^{-1}$

1- Ecrire l'équation de la réaction entre l'acide éthanoïque et l'eau.

2- Calculer les concentrations molaires effectives des ions éthanoate et oxonium.

3- Calculer le taux d'avancement final.

4- Déterminer les valeurs de la constante d'acidité et du pK_A du couple $CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-$

5- On dilue la solution 10 fois pour obtenir un volume $V_1 = 100,0mL$ de solution S_1 de concentration C_1.

5.1- Déterminer la nouvelle valeur du taux d'avancement final de réaction.

5.2- Quelle est la valeur de la conductivité σ_1 de cette solution?

Solution

1- $CH_3CO_2H(aq) + H_2O \rightleftarrows CH_3CO_2^-(aq) + H_3O^+(aq)$

2- Un tableau d'avancement de cette réaction permet d'écrire: $[CH_3CO_2^-] = [H_3O^+]$

De plus, la conductivité σ de la solution est liée aux concentrations des ions par la relation:

$\sigma = \lambda(H_3O^+).(H_3O^+) + \lambda(CH_3CO_2^-).(CH_3CO_2^-)$

$\sigma = [\lambda(H_3O^+) + \lambda(CH_3CO_2^-)].[H_3O^+]$;

$[H_3O^+] = \dfrac{\sigma}{\lambda(H_3O^+) + \lambda(CH_3CO_2^-)}$

En utilisant les unités du système international, on obtient:

$[CH_3CO_2^-] = [H_3O^+] = \dfrac{46.10^{-4}}{(35,0+4,1).10^{-3}}$

$= 1,2.10^{-1} mol.m^{-3}$

$= 1,2.10^{-4} mol.L^{-1}$

• La conductivité doit être exprimée en $S.m^{-1}$.

$\sigma = 46\mu S.cm^{-1} = 46.10^{-6}.10^2 S.m^{-1}$

$\sigma = 46.10^{-4} S.m^{-1}$

• Les conductivités molaires ioniques doivent être exprimées en $S.m^2.mol^{-1}$

$1mS.m^2.mol^{-1} = 10^{-3} S.m^2.mol^{-1}$

En utilisant ces unités, les concentrations molaires sont obtenues en $mol.m^{-3}$.

3- Par définition, le taux d'avancement final vaut $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}}$

L'avancement final est atteint lorsqu'on mesure la conductivité de la solution, car une réaction acido-basique est trés rapide.

Or ici $x_f = n_f(H_3O^+)$.

En appelant V, le volume de la solution, on en déduit $x_f = [H_3O^+].V$.

De plus: $x_{max} = C.V$.

Il vient:

$\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}} = \left[\dfrac{H_3O^+}{C}\right] = \dfrac{1,2.10^{-4}}{1,00.10^{-3}} = 0,12$

4- Par définition:

$K_A = \dfrac{[H_3O^+].[CH_3CO_2^-]}{[CH_3CO_2H]}$

Or: $[CH_3CO_2H] = C - [CH_3CO_2^-]$:

$= 1,00.10^{-3} - 1,2.10^{-4}$

$[CH_3CO_2H] = 8,8.10^{-4} mol.L^{-1}$

D'où: $K_A = 1,6.10^{-5}$ et $pK_A = 4,8$

5.1- Comme à la question 3,

$\tau_1 = \dfrac{[H_3O^+]_1}{C_1}$

Pour le calcul des constantes d'équilibre ou d'acidité, les concentrations doivent être exprimées en $mol.L^{-1}$

$1mol.m^{-3} = 10^{-3} mol.L^{-1}$

Ici, la solution a été diluée 10 fois, donc $C_1 = \dfrac{C}{10} = 1,00.10^{-4} mol.L^{-1}$

De plus: $K_A = \dfrac{[H_3O^+]_1.[CH_3CO_2^-]_1}{[CH_3CO_2H]_1}$

Or: $[CH_3CO_2^-]_1 = [H_3O^+]_1$ et

$[CH_3CO_2H]_1 = C_1 - [CH_3CO_2^-]_1$

D'où: $K_A = \dfrac{[H_3O+]_1^2}{C_1 - [H_3O^+]_1}$

$[H_3O^+]$ est solution de l'équation (1):

$[H_3O^+]_1^2 + K_A.[H_3O^+]_1 - K_A.C_1 = 0$

On obtient $[H_3O^+]_1 = 3,3.10^{-5} mol.L^{-1}$

d'où: $\tau_1 = 0,33$

On constate que, lors de la dilution, le taux d'avancement final a augmenté.

5.2- Comme à la question 2, on peut écrire:

$\sigma = \lambda(H_3O^+).[H_3O^+] + \lambda(CH_3CO_2^-).[CH_3CO_2^-]$

- $3,3.10^{-5} mol.L^{-1} = 3,3.10^{-2} mol.m^{-3}$
- $1,3.10^{-3} S.m^{-1} = 1,3.10^{-3}.10^{-3} S.cm^{-1} = 13,10^{-6} S.cm^{-1} = 13\mu S.cm^{-1}$

$\sigma = (\lambda(CH_3O^+) + \lambda(CH_3CO_2^-)^3).[H_3O^+]_1$

$\sigma_1 = (35,0+4,1).10^{-3} \times 3,3.10^{-2}$

$\sigma_1 = 1,3.10^{-3} S.m^{-1} = 13\mu S.cm^{-1}$

9 Une solution est obtenue en mélangeant un volume $V_1 = 90,0mL$ d'une solution aqueuse d'éthanoate de sodium de concentration $C = 100.10^{-2} mol.L^{-1}$ et d'un volume $V_2 = 10,0mL$ d'une solution aqueuse d'acide méthanoïque $HCOOH$ de même concentration C.

On modélise la transformation résultante par la réaction chimique d'équation:

$CH_3COO^-_{(aq)} + HCOOH_{(aq)} \rightleftarrows CH_3COOH_{(aq)} + HCOO^-_{(aq)}$

La conductivité σ du mélange réactionnel à une date t est exprimée en fonction de l'avancement x par la relation suivante: $\sigma = 81,9 + 1,37.10^4.x$; σ en $mS.m^{-1}$ et x en mol.

La mesure à $25°C$; de la conductivité du mélange à l'état d'équilibre donne: $\sigma_{eq} = 83,254 mS.m^{-1}$

Donnée: $pK_A(CH_3COOH / CH_3COO^-) = pK_{A_1} = 4,79$ à $25°C$.

1- Vérifier que la constante d'équilibre K associée à l'équation de cette réaction est $K \simeq 10$.

2- En déduire la valeur du pK_{A_2} correspondant au couple $HCOOH / HCOO^-$.

Scanned with CamScanner

Solution

1- Le tableau d'avancement de la réaction donne à l'état d'équilibre:

$[CH_3COOH]_e = [HCOO^-]_e = \frac{x_e}{V}$; $V = V_1 + V_2$;

$[CH_3COO^-]_e = \frac{CV_1 - x_e}{V}$; $[HCOOH]_e = \frac{C_2V - x_e}{V}$

$$K = \frac{[CH_3COOH]_e.[HCOO^-]_e}{[CH_3COO^-]_e.[HCOOH]_e} :$$

$$= \frac{x_e^2}{(CV_1 - x_e)(CV_2 - x_e)}$$

La valeur de σ_e permet de calculer x_e ;

$$x_e = \frac{83,254 - 81,9}{1,37.10^4} = 0,988.10^{-4} mol ;$$

$$K = \frac{(0,988.10^{-4})^2}{(90.10^{-3}.10^{-2} - 0,988.10^{-4})(10.10^{-3}.10^{-2} - 0,988.10^{-4})} \simeq 10$$

2- $$K = \frac{[CH_3COOH]_e[HCOO^-]_e}{[CH_3COO^-]_e[HCOOH]_e} = \frac{1}{\frac{[CH_3COO^-]_e[H_3O^+]_e}{[CH_3COOH]_e}} . \frac{[HCOO^-]_e[H_3O^+]_e}{[HCOOH]_e}$$

$$K = \frac{KA_2}{KA_1} = 10^{pKa_1 - pKa_2}$$

$$pK_{A_1} - pK_{A_2} = \log K$$

$$pK_{A_2} = pK_{A_1} - \log K = 3,79 - \log 10 = 3,79$$

10 On se propose d'étudier les paramètres influençant la valeur du taux d'avancement final de la réaction d'un acide avec l'eau.

1- En utilisant un tableau d'avancement de la réaction entre un acide AH et l'eau; établir l'expression suivante: $K_A = \frac{C\tau^2}{1-\tau}$

C : Concentration initiale de la solution et ; K_A : constante d'acidité du couple AH/A^-.

2- En se plaçant dans le cas de réactions très limitées ($\tau \ll 1$):

a- Exprimer τ en fonction de C et K_A.

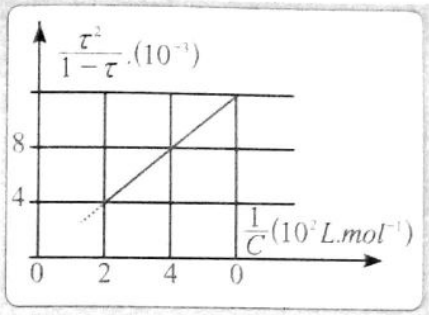
b- Comment varie τ avec la dilution?

c- Comment varie τ avec K_A?

d- Discuter les conditions dans lesquelles K_A peut varier et comment elle agit sur τ?

3- Une étude menée sur des solutions d'un acide de concentrations différentes a permis d'obtenir la courbe ci-contre.

En déduire la valeur de pK_A du couple AH/A^-.



Solution

1-

	$AH_{aq} + H_2O_{(l)} \rightarrow A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$			
Etat initial	CV	excès	0	0
Etat final	$CV - x_f$	excès	x_f	x_f

$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{x_f}{CV}$; d'où $\frac{x_e}{V} = C\tau$

$$K_A = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} = \frac{\frac{x_f}{V}.\frac{x_f}{V}}{\frac{CV - x_f}{V}} :$$

$$= \frac{(C.\tau)^2}{C - C\tau} = C.\frac{\tau^2}{1-\tau}$$

2. a- Si $\tau \ll 1$; $K_A = C.\tau^2$; alors;

$\tau = \sqrt{\frac{K_A}{C}}$

2.b- Lorsqu'on passe d'une solution de AH à une autre solution de AH, plus diluée, alors la concentration C diminue et par conséquent τ augmente.

2.c- D'après l'expression précédente:

$K_A \nearrow \Rightarrow \tau \nearrow .s$

2.d- Discussions:

1er cas: la constante K_A d'un couple peut varier uniquement avec la température;

Si K_A varie avec la température, alors τ varie aussi et dans le même sens.

2ème cas: Si on considère plusieurs solutions d'acides différents de même concentration et à la même température; alors les valeurs des constantes K_A sont différentes.

Dans ce cas lorsqu'on passe d'une solution d'un acide à celle d'un autre plus fort; (K_A plus grand); ce dernier est beaucoup plus dissocié et la valeur de τ sera plus grande.

3- L'expression de K_A donne:

$\frac{\tau^2}{1-\tau} = K_A$

$\frac{\tau^2}{1-\tau}$ en fonction de $\frac{1}{C}$ est une droite de pente égale à K_A.

$K_A = \frac{4.10^{-3}}{200} = 2.10^{-5}$

$pK_A = -\log(2.10^{-5}) \simeq 4,7$

Scanned with CamScanner

11 On prépare plusieurs solutions aqueuses d'acide ascorbique $C_6H_8O_6$ connu sous le nom de vitamine C.

Le tableau suivant donne la concentration et le pH de chacune de ces solutions.

Solution	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
$C(mol.L^{-1})$	$1,0.10^{-3}$	$5,0.10^{-3}$	$1,0.10^{-2}$	$5,0.10^{-2}$	$1,0.10^{-1}$
pH	3,65	3,28	3,11	2,75	2,6

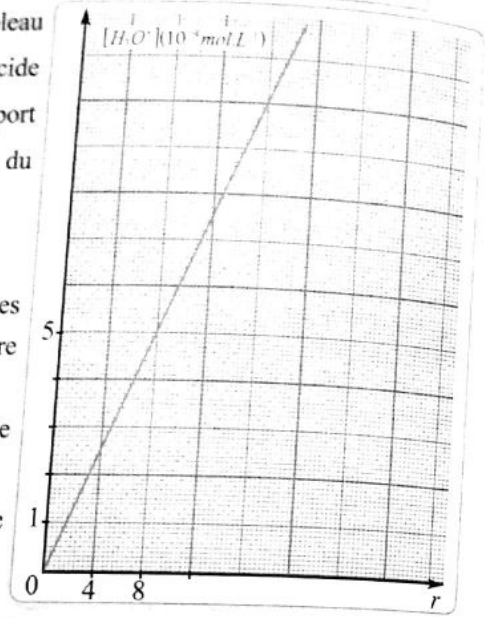
1- Montrer en utilisant un tableau d'avancement de la réaction de l'acide ascorbique avec l'eau: que le rapport $r=\frac{[C_6H_7O_6^-]}{[C_6H_8O_6]}$ à l'état d'équilibre du système peut s'écrire sous la forme:

$r = C.10^{pH} - 1$.

2- Les résultats des mesures précédentes ont permis de tracer la courbe de la figure suivante:

2.1- Calculer la valeur de r et celle de $[H_3O^+]$ dans la solution (2)

2.2- En utilisant la figure; déterminer le pK_A du couple $C_6H_8O_6/C_6H_7O_6^-$.



Solution

1-

$C_6H_8O_6 + H_2O \longrightarrow C_6H_7O_6^- + H_3O^+$			
$n = CV$		0	0
$CV - x$		x	x
$CV - x_e$		x_e	x_e

À l'état d'équilibre:

$$\begin{cases}[C_6H_8O_6] = \frac{CV - x_e}{V} = C - \frac{x_e}{V} \\ [C_6H_7O_6^-] = \frac{x_e}{V} = [H_3O^+]\end{cases}$$

$$\frac{[C_6H_8O_6]}{[C_6H_7O_6^-]} = \frac{C - \frac{x_e}{V}}{\frac{x_e}{V}} = \frac{C - [H_3O^+]}{[H_3O^+]}$$

$$= \frac{C}{[H_3O^+]} - 1 = C.10^{pH} - 1$$

2.1- $[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2,75} =$

$= 1,778.10^{-3} mol.L^{-1}$

$r = C.10^{pH} - 1$

$= 5.10^{-2}.10^{2,75} - 1$

$= 27,18$

$= 27,18$

2.2- Les concentrations à l'équilibre sont liées par l'expression de K_A;

$$K_A = \frac{[C_6H_7O_6^-][H_3O^+]}{[C_6H_8O_6]}$$

alors: $[H_3O^+] = K_A \cdot \frac{[C_6H_8O_6]}{[C_6H_7O_6^-]} = K_A.r$

$[H_3O^+] = f(r)$ est une droite linéaire dont la pente est: $K_A \simeq \frac{5}{8}.10^{-4} = 6,25.10^{-5}$

$pK_A = -\log K_A \simeq 4,2$

12 On prépare une solution aqueuse en introduisant dans de l'eau distillée une quantité de matière $n_0 = 12mmol$ d'acide benzoïque C_6H_5COOH et la même quantité n_0 de méthanoate de sodium $NaHCOO$ composé ionique très soluble dans l'eau.

Données: $pK_A(C_6H_5COOH/C_6H_5COO^-) = pK_{A_1} = 4,2$

$pK_A(HCOOH/HCOO^-) = pK_{A_2} = 3,8$

La solution obtenue a un volume constant $V = 200mL$.

1- Ecrire l'équation de la réaction ayant lieu dans la solution entre les espèces introduites.

2- Calculer la constante d'équilibre K associée à cette équation.

3- Montrer que le taux d'avancement final de cette réaction peut s'écrire:

$$\tau = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}$$

Calculer sa valeur.

Solution

1-

$C_6H_5COOH + HCOO^- \rightleftharpoons$

$C_6H_5COO^- + HCOOH$

2-

$$K = \frac{[C_6H_5][HCOOH]}{[C_6H_5COOH][HCOO^-]}$$

$$K = \frac{[C_6H_5COO^-][H_3O^+]}{[C_6H_5COOH]} \cdot \frac{[HCOOH]}{HCOO^-.H_3O^+}$$

$$K = \frac{K_{A_1}}{K_{A_2}}$$

$K = 10^{pK_{A_2} - pK_{A_1}} = 10^{3,8-4,2} \simeq 0,4$

3- Utilisons pour simplifier l'équation suivante:

	$A_1 + B_2 \longrightarrow B_1 + A_2$			
Etat initial	n_0	n_0	0	0
Etat final	$n_0 - x_f$	$n_0 - x_f$	x_f	x_f

$x_f = \tau.x_{max}.\tau = n_0.\tau$

À l'état final: $[B_1] = [A_2] = \frac{n_0\tau}{V}$

$$[A_1] = [B_2] = \frac{n_0 - x_f}{V}$$

$$= \frac{n_0(1-\tau)}{V}$$

$$K = \frac{[B_1][A_2]}{[A_1][B_2]} = \frac{\left(\frac{n_0.\tau}{V}\right)^2}{\left(\frac{n_0(1-\tau)}{V}\right)^2}$$

$$K = \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^2$$

$$\frac{\tau}{1-\tau} = \sqrt{K}, \ \tau = \sqrt{K} - \tau\sqrt{K}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}} = 0,53$$

Scanned with CamScanner

13 Un volume V de solution de phosphate d'ammonium est préparé en dissolvant $n_0 = 10mmol$ de phosphate d'ammonium solide $(NH_4)_3PO_4$ dans la quantité nécessaire d'eau.

Données: $pK_A(NH_4^+/NH_3) = pK_{A_1} = 9,2$; $pK_A(HPO_4^{2-}/PO_4^{3-}) = pK_{A_2} = 12,4$

1- Tracer sur un même axe, les diagrammes de prédominance des espèces acides et basiques des deux couples mis en jeu. Les ions ammonium et phosphate peuvent-ils être simultanément les espèces prédominantes de leur couple?

2- Déterminer la constante d'équilibre associée à la réaction entre l'ion ammonium et l'ion phosphate.

3- Établir un tableau d'avancement et déterminer la composition du système dans l'état final.

4- En déduire la valeur du pH de cette solution.

Solution

1- NH_4^+ | NH_3 (12,4) | 9,2 HPO_4^{2-} | PO_4^{3-} — pH

D'après le diagramme de prédominance, les espèces ions ammonium et phosphate n'ont pas de domaine de prédominance commun; on en déduit qu'ils ne peuvent pas être simultanément les espèces prédominantes de leurs couples respectifs.

2- La réaction d'équilibre associée a pour expression:

$$K = \frac{[HPO_4^{2-}].[NH_3]}{[PO_4^{3-}].[NH_4^+]} = \frac{K_{A_1}}{K_{A_2}} = 10^{(pK_{A_1} - pK_{A_2})}$$

$$= 1,6.10^3$$

3- D'après l'équation de dissolution du phosphate d'ammonium dans l'eau:

$$(NH_4)_3PO_{4(s)} \xrightarrow{eau} 3NH_{4(aq)}^+ + PO_{4(aq)}^{3-}$$

La dissolution de la quantité de matière $n_0 = 10mmol$ donne naissance à:

$n(NH_4^+) = 3n_0$ et $n(PO_4^{3-}) = n_0$

Equation de la réaction	$NH_4^+ + PO_4^{3-} \rightleftharpoons NH_3 + HPO_4^{2-}$			
Etat initial (mol)	$3n_0$	n_0	0	0
Etat final (mol)	$n_0 - x_f$	$n_0 - x_f$	x_f	x_f

On peut exprimer K en fonction l'avancement final:

$$K = \frac{(x_f/V)^2}{((3,0.10^{-2} - x_f)/V).((1,0.10^{-2} - x_f)/V))}$$

$$K = \frac{(x_f)^2}{(3,0.10^{-2} - x_f).(1,0.10^{-2} - x_f)}$$

x_f est solution de l'équation du second degré:

$$(1-K)x_f^2 + 4,0.10^{-2}Kx_f - 3,0.10^{-4}K = 0$$

$$x_f = 0,99969.10^{-2}mol = 1,0.10^{-2}mol$$

D'où:

dans l'état final:

$n_f(NH_3) = n_f(HPO_4^{2-}) = 1,0.10^{-2}mol$;

$n_f(NH_4^+) = 2,0.10^{-2}mol$;

$n_f(PO_4^{3-}) = 1,0.10^{-2} - 0,99969.10^{-2}$.

$= 3,1.10^{-6}mol \quad 0mol$

4- On peut calculer le pH en utilisant le pK_A du couple ion ammonium/ammoniac.

$$pH = pK_{A_1} + \log\left(\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}\right)$$

$$= pK_{A_1} + \log\left(\frac{n_f[NH_3]/V}{n_f[NH_4^+]/V}\right)$$

$$pH = pK_{A_1} + \log\left(\frac{n_f[NH_3]}{n_f[NH_4^+]}\right)$$

$$= 9,2 + \log\left(\frac{1}{2}\right) = 8,9$$

Dosage de l'aspirine

14 On dissout un comprimé d'aspirine dans de l'eau, additionnée d'éthanol pour faciliter la dissolution. On obtient 500mL de solution.

On dose 100 mL de cette solution par de la soude de concentration $C_b = 5,00.10^{-2}mol.L^{-1}$

Le volume à l'équivalence est de $11,1mL$.

Données: $M_{asp} = 180g.mol^{-1}$

1- La solution à l'équivalence est -elle acide ou basique? justifier.

2- Déterminer la quantité de matière de l'acide acétylsalicylique dosée.

3- Déterminer la masse de cet acide contenue dans le comprimé.

4- Les comprimés d'aspirine en pharmacie portent les indication 250,500 et 1000 Ces nombres représentent la masse en mg de produit actif (acide acétylsalicylique) contenue dans un comprimé.

Quelle est l'indication du comprimé dosé?

Solution

1- Le dosage a été effectué à l'aide d'une solution basique, la solution dosée est donc acide et l'aspirine est un acide de Brönsted. A l'équivalence cet acide est neutralisé et remplacé par sa base conjuguée qui donne au mélange un caractère basique ($pH > 7$).

2- $n_A = C_AV_A = C_BV_{BE} = 5.10^{-2}.11,1.10^{-3}$

$= 5,55.10^{-4}mol$

3- Dans le volume dosé $V_A = 100mL$ on a:

$m = n_A.M = 9,99.10^{-2}g$

Dans le volume $V = 500mL$ contenant $m_C = n_C.M$ de comprimé dissout on a:

$m_C = n_C.M = C_A.V.M$

$= \frac{n_A}{V_A}.V.M$

$= \frac{5,55.10^{-4}}{100}.500.180$

$= 0,4995g$

4- Cette masse vaut à peu près $500mg$, et le comprimé est de type 500.

Scanned with CamScanner

15 La formule générale des acides carboxyliques est $C_nH_{2n+1}COOH$ où n est un nombre entier.

On prépare une solution S_A d'un acide carboxylique en dissolvant une masse $m = 450mg$ de cet acide. On ajuste à l'aide de l'eau distillée le volume de la solution à $V_0 = 500mL$.

On prélève de S_A un volume $V_A = 10mL$ et on le dose à l'aide d'une solution S_B d'hydroxyde de sodium $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$ de concentration $C_B = 10^{-2}mol.L^{-1}$.

L'équivalence est obtenue lorsque le volume versé est $15mL$.

Données:

$M(H) = 1g.mol^{-1}$; $M(C) = 12g.mol^{-1}$; $M(O) = 16g.mol^{-1}$

1- Ecrire l'équation de la réaction de ce dosage.

2- Calculer la concentration molaire C_A de la solution S_A ; puis montrer que la formule de l'acide carboxylique est CH_3COOH.

3- On prend un volume V de la solution S_A, on mesure le pH à $25°C$ et l'on trouve $pH = 3,3$.

3.1- A l'aide d'un tableau d'avancement, exprimer l'avancement x_f de la réaction de l'acide avec l'eau, en fonction de pH et V, puis établir l'expression:

$\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} = -1 + C_A.10^{pH}$; les concentrations sont à l'équilibre.

3.2- En déduire pK_{A_2} correspondant au couple CH_3COOH/CH_3COO^-.

Solution

1- $C_nH_{2n+1}COOH_{(aq)} + H_2O \longrightarrow C_nH_{2n+1}COO^- + H_3O^+_{(aq)}$.

2-

$C_A = \frac{C_B V_{BE}}{V_A} = \frac{10^{-2}.15}{10} = 1,5.10^{-2}mol.L^{-1}$;

$C_A = \frac{n}{V} = \frac{m}{M.V_0}.M = \frac{m}{C_A.V_0}$

$M = \frac{450.10^{-3}}{1,5.10^{-2}.0,5} = 60g.mol^{-1}$

Or $M = M(C_nH_{2n+1}COOH) = 14n + 46$

$n = \frac{M-46}{14} = \frac{60-46}{14} = 1$

Il s'agit donc de CH_3COOH

3.1-

$CH_3COOH + H_2O \longrightarrow CH_3COO^- + H_3O^+$			
C_AV	excès	0	0
$C_AV - x_f$	excès	x_f	x_f

$x_f = n_f(H_3O^+) = [H_3O^+].V = 10^{-pH}.V$

$[CH_3COO^-] = \frac{x_f}{V} = 10^{-pH}$

$[CH_3COOH] = \frac{C_AV - x_f}{V} = C_A - 10^{-pH}$

alors : $\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} = \frac{C_A - 10^{-pH}}{10^{-pH}}$

$\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} = \frac{C_A - 10^{-pH}}{10^{-pH}} = C_A.10^{pH} - 1$

3.2- $pH = pK_A + \log\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}$

$pK_A = pH + \log\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]}$

$pK_A = pH + \log(C_A.10^{pH} - 1)$

$pK_A = 3,3 + \log(1,5.10^{-2}.10^{3,3} - 1)$

$pK_A \simeq 4,76$

16 L'acide ascorbique ou vitamine C intervient dans diverses réactions d'oxydo réduction cellulaires.

Elle favorise le développement des os, des tendons et des dents.

Présente dans de très nombreux aliments, en particulier dans les produits frais, légumes verts et fruits, elle est synthétisée par presque tous les animaux sauf l'homme, certains singes et certains oiseaux.

De très nombreux oxydants peuvent oxyder l'acide ascorbique, c'est la raison pour laquelle l'acide ascorbique est utilisé comme antioxygène: en réagissant avec le dioxygène, il empêche celui-ci d'oxyder les constituants des aliments. C'est un additif indiqué par le code E300.

L'acide ascorbique, ou vitamine C, a pour formule brut $C_6H_8O_6$.

On désire déterminer la teneur en acide ascorbique d'un jus, considérée comme une solution aqueuse qu'on notera S.

Données:

• Masses molaires atomiques en $g.mol^{-1}$: $M(H) = 1,0$; $M(C) = 12,0$; $M(O) = 16,0$

Densité du jus: $d = 1,2$, masse volumique de l'eau: $\rho_e = 1g/mL$

On dilue le jus dix fois et on obtient une solution S_a

On réalise un dosage pH-métrique d'un volume $V_a = 10,0mL$ de la solution S_a à l'aide solution S_b d'hydroxyde de sodium ou soude $(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)})$ de concentration molaire $C_b = 5,0 \times 10^{-3}mol.L^{-1}$

1- Écrire l'équation de la réaction de dosage.

2- Définir l'équivalence du dosage.

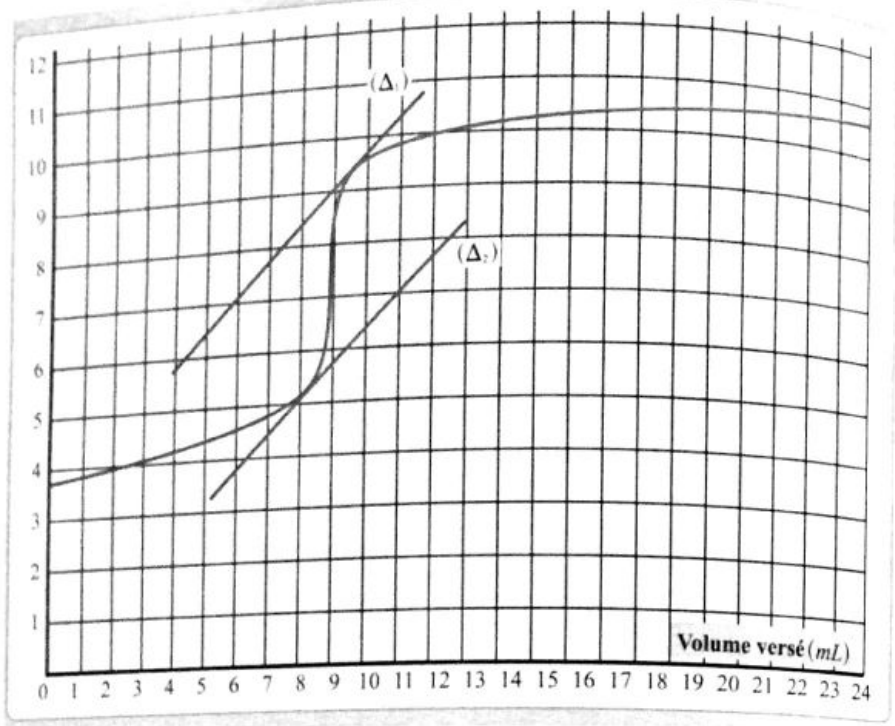
3- À l'aide de la courbe fournie ci-après, déterminer le volume V_E versé à l'équivalence en expliquant la démarche utilisée.

4- Écrire la relation entre les quantités de matière des réactifs à l'équivalence et en déduire la valeur de la concentration molaire de la solution titrée.

5- Déterminer la concentration massique effective de la vitamine C dans le jus.

6- Déterminer la teneur en vitamine C du jus.

Scanned with CamScanner



Solution

1- $C_6H_8O_{6(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow C_6H_7O^-_{6(aq)} + H_2O_{(l)}$

2- L'équivalence est l'état atteint par le mélange lorsque la quantité de matière introduite en réactif est égale à la quantité de matière de l'espèce à doser, car les coefficients stoechiométriques sont égaux.

Dans le cas étudié, on a donc à l'équivalence : $n_{HO^-_{(aq)}\ introduit} = n_{C_6H_8O_{6(aq)}}$

On détermine le volume V_E à partir de la courbe $pH = f(V_b)$ en utilisant la méthode dite des «tangentes».

3- On trace deux droites (Δ_1) et (Δ_2) parallèles entre elles et tangentes à la courbe $pH = f(V_b)$ puis on trace la droite (Δ) équidistante.

Graphiquement, on obtient $V_E = 9,0mL$.

4- La quantité de matière d'acide ascorbique initialement introduite est:

$n_{C_6H_8O_{6(i)}} = c_a V_a$

La quantité de matière d'ions hydroxyde versée à l'équivalence est: $n_{bE} = c_b V_E$

Sachant qu'à l'équivalence: $n_{bE} = n_{C_6H_8O_{6(i)}}$

On a: $c_b V_E = c_a V_a$

D'où: $c_a = \dfrac{c_b V_E}{V_a}$

Application numérique:

$c_b = 5,0.10^{-2} mol.L^{-1}$; $V_E = 9,0mL$ et $V_a = 10,0mL$

On calcule : $c_a = 4,5.10^{-2} mol.L^{-1}$

- Concentration molaire de S:

La solution S diluée 10 veut dire que $V_a = 10V$ et $C_a = \dfrac{1}{10}C$;

$C = 10.C_a = 4,5.10^{-1} mol.L^{-1}$

5- La concentration massique notée C_m a pour expression:

$C_m = \dfrac{m}{V} = \dfrac{n}{V}.M = C.M = 4,5.10^{-1}.176$

$= 79,2g/L$

6- La teneur massique (ou pourcentage massique) est déterminée par le rapport:

$$t = \frac{\text{masse de la vitamine } C}{\text{masse du jus}} = \frac{m(C)}{m(S)}$$

$m(S)$: masse du jus noté solution S.

On a: $m(C) = n.M$

et: $m(S) = \rho.V = d.\rho_e.V$

donc: $t = \dfrac{n.M}{d.\rho_e.V} = \dfrac{n}{V}.M.\dfrac{1}{d.\rho_e} = \dfrac{C.M}{d.\rho_e}$

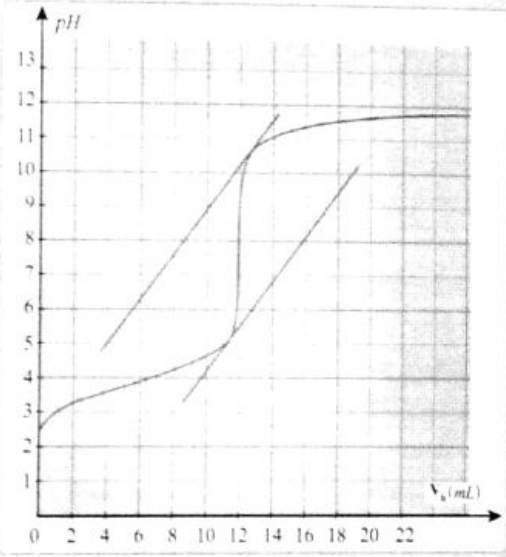
au encore: $t = \dfrac{C_m}{d.\rho_e}$

A.N:

$t = \dfrac{4,5.10^{-1}.176}{1,2.10^3} = 6,6.10^{-2} = 6,6\%$

17 L'objectif de cet exercice est le dosage d'une solution d'acide benzoïque et la détermination de la valeur du pK_A du couple $C_6H_5COOH/C_6H_5COO^-$

On dose une solution (S) d'acide benzoïque de volume $V = 15,2mL$ et de concentration c avec une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $c_b = 2,0.10^{-1} mol.L^{-1}$



1- Écrire l'équation de la réaction du dosage.

2- On obtient au cours de ce dosage l'évolution du pH de la solution en fonction du volume V_b de la solution d'hydroxyde de sodium ajouté (*voir figure*)

2.1- Déterminer la concentration de la solution de l'acide benzoïque.

2.2- Déterminer le pH du mélange à l'équivalence.

2.3- On dispose de deux indicateurs colorés indiqués dans le tableau suivant:

L'indicateur	*Zone de virage*
Hélianthine	3,2 − 4,4
Phénolphtaléine	8,2 − 10,0

Scanned with CamScanner

Choisir l'indicateur coloré qui convient à ce dosage

Justifier votre choix.

3- On considère le mélange obtenu lorsque le volume versé est $V_b = \frac{1}{2}V_{bE}$ (demi-équivalence).

On considère que la réaction du dosage est totale.

3.1- Montrer que dans ce mélange l'acide benzoïque est à moitié neutralisé.

3.2- En déduire la valeur du pK_a du couple $C_6H_5COOH/C_6H_5COO^-$.

4- On considère maintenant le mélange lorsque $V_b = 0$ et on néglige la concentration des ions H_3O^+ devant celle de l'acide benzoïque.

4.1- Exprimer dans ce mélange pK_a en fonction de pH et C.

4.2- Retrouver la valeur de pK_a.

Solution

1- $C_6H_5COOH_{aq} + HO^-_{aq} \longrightarrow C_6H_5COO^-_{aq} + H_2O_{(l)}$

2.1- Le volume à l'équivalence est $V_{bE} = 12mL$.

$C = \frac{C_b V_{bE}}{V} = \frac{2.0.10^{-2}.12}{15.2} = 0,16mol.L^{-1}$

2.2- $pH_E \simeq 8,4$

2.3- L'indicateur coloré qui convient à ce dosage est le phénolphtaléine, car sa zone de virage comprend la valeur $pH_E = 8,4$.

3.1- Pour simplifier, on symbolise C_6HCOOH par AH.

La quantité de matière de cet acide dans l'échantillon à doser est $n_0 = CV$.

Un tableau descriptif de la réaction du dosage donne au moment où $V_b = \frac{1}{2}V_{bE}$:

$n(AH) = CV - x_f = CV - x_{max}$; car la réaction est totale;

$n(AH) = CV - C_bV_b$; (HO^- limitant: $x_{max} = C_bV_b$)

alors: $n(AH) = CV - \frac{1}{2}C_bV_{bE}$;

Or: $C_bV_{bE} = C_aV_a$; donc:

$n(AH) = CV - \frac{1}{2}CV = \frac{1}{2}CV = \frac{1}{2}n_0$

3.2- Le tableau descriptif donne également:

$n(A^-) = x_f = x_{max} = C_bV_b = \frac{1}{2}CV = \frac{1}{2}n_0$

Donc: $[A^-] = [AH]$ et par suite:

$K_a = [H_3O^+]$

alors: $pK_a = pH$

La courbe donne pour $V_b = 6mL$:

$pH = 4,2$ d'où $pK_a = 4,2$

4.1- Lorsque $V_b = 0$; le mélange n'est autre que la solution S d'acide benzoïque dont le pH est donné par la courbe: $pH \simeq 2,5$.

Dans cette solution les ions H_3O^+ sont dus à la dissociation de C_6H_5COOH dans l'eau.

$C_6H_5COOH + H_2O \longrightarrow C_6H_5COO^- + H_3O^+$			
$n_0 = CV$	excès	0	0
$CV - x_f$	excès	x_f	x_f

La constante d'équilibre de ce couple est:

$K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} \approx \frac{[H_3O^+]^2}{C - [H_3O^+]}$

$= \frac{[H_3O^+]^2}{C}$

$10^{-pK_a} = \frac{10^{-2pH}}{C}$

$10^{2pH-pK_a} = \frac{1}{C}$

$2pH - pK_a = -\log C$

$pK_a = 2pH + \log C$

$= 2.2,5 + \log(0,16) = 4,2$

18 **L'acide benzoïque de formule C_6H_5COOH est utilisé comme conservateur de substances alimentaires dans les boites de conserve et les boissons.**

Sur l'étiquette d'une boisson gazeuse, on lit :

«acide benzoïque : 180mg par litre»

Afin de vérifier cette information, on réalise l'expérience suivante :

À un volume $V = 20mL$ de cette boisson on ajoute un volume $V_b = 80mL$ d'une solution S_b d'hydroxyde de sodium ($Na^+_{aq} + HO^-_{aq}$) de $pH = 11$.

Le pH du mélange à l'état final est $pH = 10,7$

On donne:

$pK_a(C_6H_5COOH/C_6H_5COO^-) = 4,2$.

$M(C_6H_5COOH) = 122g.mol^{-1}$.

$K_e = [H_3O^+][HO^-] = 10^{-14}$.

1- Ecrire l'équation de la réaction entre les ions hydroxyde et l'acide benzoïque.

On considère que cette réaction est la seule qui ait eu lieu dans ce mélange.

2- Calculer sa constante d'équilibre.

Cette réaction peut-elle être considérée comme totale?

3- Calculer la quantité de matière $n_i(HO^-)$ des ions HO^- dans le mélange à l'état initial et la quantité de matière $n_f(HO^-)$ de ces ions dans le mélange à l'état final.

4- Déterminer en utilisant un tableau d'avancement de la réaction précédente; la teneur massique t (en g/L) de l'acide benzoïque dans la boisson.

Solution

1- $C_6H_5COOH_{(aq)} + HO^- \longrightarrow C_6H_5COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

2- $K = \frac{[C_6H_5COO^-][H_2O]}{[C_6H_5COOH][HO^-]} = \frac{K_A}{[HO^-][H_3O^+]} = \frac{K_A}{K_e} = 10^{pK_e - pK_A}$

$K = 10^{14-4,2} = 6,31.10^9 > 10^4$

Cette réaction est totale

3- La quantité $n_i(HO^-)$ provient du volume V_b de la solution ($Na^+ + HO^-$) de concentration C_B :

$C_B = [HO^-]_B = \frac{K_e}{[H_3O^+]_B}$

$C_B = 10^{pH-14} = 10^{-3}mol/L$

$n_i(HO^-) = [HO^-]_B.V_B = 8.10^{-3}mol$

- On calcule la quantité des ions (HO^-)

Scanned with CamScanner

restants dans le mélange à l'aide du *pH* final.

$n_r(HO^-) = [HO^-]_f \cdot V_f = \frac{K_e}{[H_3O^+]}(V_a + V_b)$

$= 10^{pH-pK_e}(V_a + V_b)$

$n_r(HO^-) = 5.10^{-6}\,mol$

4- Puisque la réaction est totale, l'un des réactifs doit disparaître totalement, en effet : $n_0 - n_r(HO^-) = 0$, donc l'acide benzoïque est le réactif limitant.

Le tableau descriptif permet d'écrire :

$x_f = x_{max} = n_0$: quantité d'acide benzoïque dans le volume V_a de la boisson.

$n_0(HO^-) = n_r(HO^-) - x_{max} = n_r(HO^-) - x_f$

$n_0 = n_r(HO^-) - n_r(HO^-)$

ou encore $\frac{m(A)}{M(A)} = n_r(HO^-) - n_r(HO^-)$

$m(A) = [n_r(HO^-) - n_r(HO^-)] \cdot M(A)$

$t = \frac{m(A)}{V_a}$ (concentration massique)

$t = [n_r(HO^-) - n_r(HO^-)] \frac{M(A)}{V_a}$

$t = (8 - 5).10^{-6} \frac{122}{20.10^{-3}} = 0,0183\,g/L$

$= 183\,mg/L$

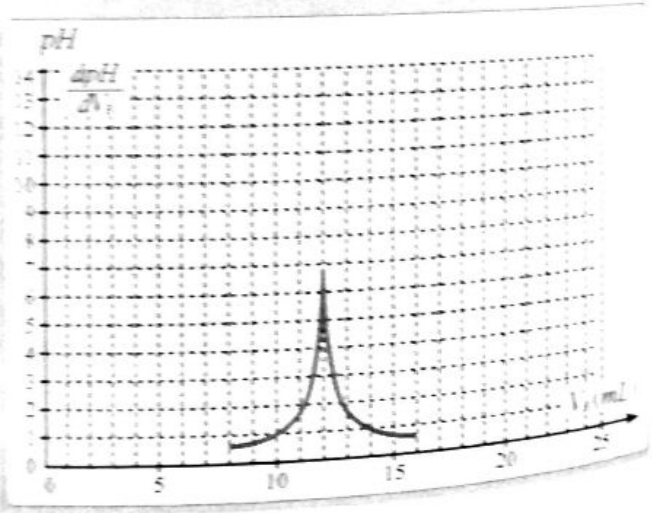
Ce résultat est très proche de l'indication des données.

On verse progressivement, à l'aide d'une burette, un volume V_b d'une solution de soude de concentration $C_b = 2,00.10^{-2}\,mol.L^{-1}$ dans un volume $V_a = 20,0\,mL$ de solution d'acide éthanoïque de concentration C_a.

La mesure de *pH* du mélange au cours de cette opération a donné les résultats ci-dessous :

V_b (mL)	2	3,0	5,0	8,0	10,0	11,0	11,5	12,5	13,0	15,0	18,0
pH	3,76	4,32	4,65	5,10	5,50	5,84	6,16	10,5	10,8	11,2	11,5

Un appareillage convenable a permis de tracer le graphe $\frac{dpH}{dV_b} = f(V_b)$ représenté sur la figure suivante :



Donnée : $pK_e = 14,0$

1- Ecrire l'équation de la réaction de titrage supposée totale.

2- Déterminer la concentration C_a.

3- Avant l'équivalence, établir un tableau d'avancement et en déduire que l'expression du *pH* en fonction du volume de soude versé, s'écrit sous la forme :

$pH = pK_a + \log \frac{V_b}{V_{bE} - V_b}$

le pK_a correspond au couple $(CH_3CO_2H/CH_3CO_2^-)$

4- Déterminer la valeur de pK_a.

5- Après l'équivalence, déterminer la concentration en ions hydroxyde, puis le *pH* en fonction de V_b, V_{bE}, V_a, C_b et pK_e.

6- En déduire le *pH* du mélange lorsque le volume verse est 20,0mL.

Solution

1- $CH_3CO_2H_{aq} + HO^-_{aq} \rightleftharpoons CH_3CO_2^-_{aq} + H_2O$

2- L'équivalence correspond au mélange stoechiométrique des réactifs de la réaction de titrage. Il en découle :

$n_0(CH_3CO_2H) = n_0(HO^-)$.

Soit : $C_a V_a = C_b V_{bE}$. La courbe donne $B_{bE} = 12mL$

D'où :

$C_a = \frac{C_b B_{bE}}{V_a}$

$C_a = \frac{2,00.10^{-2}.12}{20} = 1,2.10^{-2}\,mol.L^{-1}$

3- On peut établir le tableau d'avancement suivant :

Equation de la réaction	$CH_3CO_2H + HO^- \rightleftharpoons CH_3CO_2^- + H_2O$			
Etat initial (mol)	$C_a V_a$	$C_b V_b$	0	0
Etat final (mol)	$C_a V_a - x_f$	$C_b V_b - x_f$	x_f	x_f

L'équivalence correspond au changement de réactif limitant.

Avant l'équivalence, HO^- est réactif limitant.

La réaction étant totale, on en déduit :

$x_f = C_b V_b$

On peut alors écrire :

$n_f(CH_3CO_2^-) = C_b V_b$ et

$n_f(CH_3CO_2H) = C_a V_a - C_b V_b$

En utilisant la relation d'équivalence : $C_a V_a = C_b V_{bE}$ il vient :

$n_f(CH_3CO_2H) = C_b V_{bE} - C_b V_b$

$= C_b (C_{bE} - V_b)$

La relation reliant *pH* et pK_a permet d'écrire :

$pH = pK_a + \log \frac{[CH_3CO_2^-]}{[CH_3CO_2H]}$

$= pK_a + \log \frac{V_b}{V_{bE} - V_b}$

$= pK_a + \log \frac{V_b}{V_{bE} - V_b}$

4- $pK_a = pH - \log \frac{V_b}{V_{bE} - V_b}$

On calcule pK_a en utilisant le tableau des données :

pour $V_b = 2mL$, $pH = 3,76$

$pK_a = 3,76 - \log \frac{2}{12 - 2} = 4,8$

5- Après l'équivalence, le réactif limitant est l'acide éthanoïque.

La réaction étant totale, on en déduit :

$C_a V_a - x_f = 0$

Soit : $x_f = C_a V_a$ et :

$n(HO^-) = C_b V_b - C_b V_{bE} = C_b (V_b - V_{bE})$

Scanned with CamScanner

Le volume de la solution étant égal à $(V_A + V_B)$, il en découle:

$[HO^-] = \frac{C_B(V_B - V_{BE})}{(V_A + V_B)}$, et

$pH = pK_e + \log\left(\frac{C_B(V_B - V_{BE})}{V_A + V_B}\right)$

6- Soit, avec V_B en mL:

$pH = 14 + \log\left(\frac{2,00.10^{-2}(V_B - 12,0)}{(20,0 + V_B)}\right)$;

pour $V_B = 20,0mL$, on trouve:

$pH = 11,6$

20 Le vinaigre est une solution aqueuse d'acide éthanoïque CH_3COOH.

On caractérise un vinaigre par son degré d'acidité qui représente le pourcentage en masse d'acide éthanoïque dans la solution.

On lit sur l'étiquette d'un vinaigre l'indication suivante: vinaigre de 7°

On se propose d'étudier les propriétés de la réaction d'un dosage et de vérifier cette indication.

On prélève un échantillon de la solution de vinaigre notée S et on le dilue dix fois, la solution obtenue est noté S_a de concentration malaire C_a.

On procède au dosage d'un volume $V_1 = 20mL$ de la solution S_a à l'aide d'une solution de soude S_b de concentration $C_b = 0,20mol.L^{-1}$.

L'équivalence est atteinte pour un volume de soude versé $V_{bE} = 12mL$

Le tableau suivant donne quelques mesures de ce dosage:

$V_b(mL)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
pH	2,88	4,10	4,50	4,78	5,10	5,50	8,24	10,72	11,23

Données: $M(CH_3COOH) = 60g.mol^{-1}$

masse volumique de l'eau: $\rho_e = 1,00.10^3 g.L^{-1}$;

densité du vinaigre: $d = 1,05$;

produit ionique de l'eau: $K_e = 10^{-14}$;

on considère que l'acide éthanoïque est le seul acide dans le vinaigre.

1- Ecrire l'équation de la réaction de ce dosage.

2- Montrer en utilisant un tableau descriptif; que le taux d'avancement final de cette réaction s'écrit de la façon suivante: $\tau = 1 - \frac{V_a + V_b}{C_b V_b}.10^{pH-14}$.

Faire l'application numérique pour $V_b = 4mL$; conclure.

3- Montrer que pour un volume V_b versé $(V_b < V_{bE})$; le pH du mélange peut s'écrire: $pH = pK_A + \log\frac{\alpha}{1-\alpha}$; α représente $\frac{V_b}{V_{bE}}$.

4- En prenant le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, déterminer le pK_A du couple CH_3COO/CH_3COO^-.

5- Calculer dans le mélange; à l'équivalence, le rapport $\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]}$, conclure.

6- Déterminer la contraction C de la solution du vinaigre S.

7- Déterminer le degré noté D du vinaigre étudié.

Solution

$CH_3COOH + HO^- \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_2O$

1-

2-

	$CH_3COOH + HO^- \longrightarrow CH_3COO^- + H_2O$					
Etat initial	$V_b = 0$	$x = 0$	$n_a = C_aV_a$	$n_b = C_bV_b$	0	excès
Etat final	$V_b < V_{bE}$	x	$C_aV_a - x_f$	$C_bV_b - x_f$	x_f	excès

Avant l'équivalence $(V_b < V_{bE})$ le réactif limitant est HO^-; $x_{max} = C_bV_b$

On a $n_f(HO^-) = C_bV_b - x_f$, donc:

$x_f = C_bV_b - n(HO^-)$

$= C_bV_b - [HO^-].(V_a + V_b)$

$= C_bV_b - \frac{10^{-14}}{10^{-pH}}.(V_a + V_b)$;

d'où: $\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = 1 - \frac{V_a + V_b}{C_bV_b}.10^{pH-14}$

$\tau = 1 - \frac{24}{0,8}.10^{-9,5} \simeq 1$ (réaction totale)

3- Utilisons l'expression de la constante d'acidité du couple CH_3COOH/CH_3COO^-; noté AH/A^- pour simplifier.

On a: $K_A = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$;

d'où: $pH - pK_A = \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

donc: $pH = pK_A + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$ (1)

En revenant au tableau d'avancement;

$\frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{x_f}{C_aV_a - x_f} = \frac{x_{max}}{C_aV_a - x_{max}}$

$= \frac{C_bV_b}{C_aV_a - C_bV_b}$;

Or $C_aV_a = C_bV_{bE}$; alors:

$\frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{C_bV_b}{C_bV_{bE}} = \frac{V_b}{V_{bE} - V_b} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$;

la relation (1) devient:

$pH = pK_A + \log\frac{\alpha}{1-\alpha}$

4- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, le volume V_b est

$V_b = \frac{1}{2}V_{bE} = 6mL$ et il lui correspond

$pH = 4,78$ (tableau) donc

$pH = pK_A + \log 1$; d'où $pK_A = 4,78$.

5- $\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} = 10^{pH_E - pK_A}$ =

$= 10^{8,24-4,78} = 2884$

A l'équivalence l'acide dosé est très minoritaire devant sa base conjuguée.

6- $C = 10C_a = 10.\frac{C_bV_{bE}}{V_a}$ =

$= 10.\frac{0,2.12}{20}12mol.L^{-1}$

7- $D = \frac{\text{masse de l'acide}}{\text{masse de la solution}} = \frac{m}{m_{sol}}$

Or; $m(CH_3COOH) = n.M$

et; $m_{sol} = \rho.V_{sol} = d.\rho_e.V_{sol}$;

donc: $D = \frac{n.M(AH)}{d.\rho_e.V_{sol}} = \frac{n(AH)}{V_{sol}}.\frac{M(AH)}{d.\rho_e}$

$= C.\frac{M(AH)}{d.\rho_e}$

$D = \frac{1,2.60}{1,05.10^3} = 0,068$

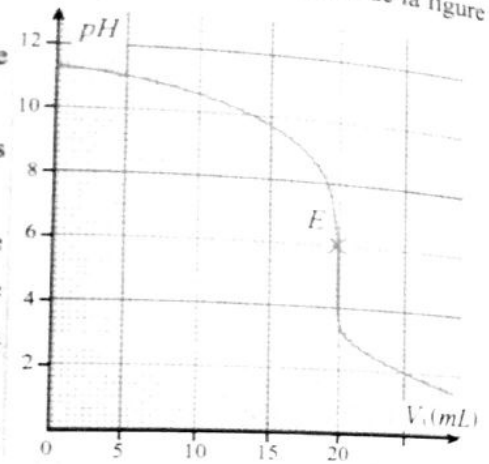
$= 6,8\% \simeq 7°$

Scanned with CamScanner

21 On prépare une solution aqueuse S_0 de volume $V_0 = 250mL$ en dissolvant une masse $m_0 = 3,1g$ d'une base B de formule $C_nH_{2n+1}NH_2$ dans de l'eau distillée.

- On dilue S_0 quarante fois et on obtient une solution S_B de concentration molaire C_B.
- On prélève un volume $V_B = 10mL$ de (S_B) et on le dose à l'aide d'une solution S_A d'acide chlorhydrique $(H_3O^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)})$ de concentration $C_A = 5mmol.L^{-1}$.

Le suivi de pH du mélange au cours de ce dosage a conduit à la courbe de la figure suivante.



1- Ecrire l'équation de la réaction de ce dosage.

2- La réaction d'un dosage doit remplir trois critères. Lesquels?

3- On considère le mélange lorsque le volume versé est $V_A < V_{AE}$; V_{AE} étant le volume de la solution S_A nécessaire à l'équivalence:

- Montrer que le taux d'avancement final de la réaction de ce dosage s'écrit:

$$\tau = 1 - \frac{V_A + V_B}{C_A V_A}.10^{-pH}$$

- Calculer τ pour $V_A = 5mL$. Conclure

4- Déterminer la valeur de la concentration C_0.

5- En déduire la formule de la base B, sachant qu'elle figure parmi les propositions suivantes:

Composé	CH_3NH_2	$C_2H_5NH_2$	$C_3H_7NH_2$
Masse molaire en $g.mol^{-1}$	**31**	**45**	**59**

6- En étudiant le mélange lorsque $V_A = \frac{1}{2}V_{AE}$; déterminer le pK_A du couple BH^+/B.

7- Quel volume V_A doit-on verser pour que l'acide BH^+ soit seize fois plus concentré que sa base conjuguée dans le mélange?

Solution

1- $C_nH_{2n+1}NH_{2(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \longrightarrow C_nH_{2n+1}NH^+_{3(aq)} + H_2O$

2- La réaction d'un dosage doit être rapide, totale et sélective; c'est-à-dire que l'espèce dosante (H_3O^+) réagit avec une seule espèce: l'espèce à doser.

3-

	$B + H_3O^+ \longrightarrow BH^+ + H_2O$			
$x = 0$	C_BV_B	C_AV_A	0	excès
x_f	C_BV_B	$C_AV_A - x_f$	x_f	excès

Lorsque $V_A < V_{AE}$; le mélange se trouve avant l'équivalence, la base B à doser n'est pas complètement éliminée, le réactif limitant est H_3O^+; $x_{max} = C_AV_A$

On a: $n_f(H_3O^+) = C_AV_A - x_f$;

d'où $x_f = C_AV_A - n_f(H_3O^+)$

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = 1 - \frac{(V_A + V_B)}{C_AV_A}.10^{-pH}$$

$$\tau = 1 - \frac{15}{5.10^{-3}.5}.10^{-11} \simeq 1:$$

réaction totale.

4- $C_0 = 40C_B = 40.\frac{C_AV_{AE}}{V_B} = 0,4mol.L^{-1}$

5- $C_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0}{M.V_0}$;

$$M = \frac{m_0}{C_0.V_0} = 31g/mol$$

il s'agit du composé de formule CH_3NH_2

6- La réaction est totale et H_3O^+ est le réactif limitant:

$x_f = x_{max} = C_AV_A = \frac{1}{2}C_AV_{AE} = \frac{1}{2}C_BV_B$

d'où: $n(BH^+) = x_f = \frac{1}{2}C_BV_B$

$$n(B) = C_BV_B - x_f = \frac{1}{2}C_BV_B$$

donc: $[BH^+] = [B] = \frac{1}{2}.\frac{C_BV_B}{V_A + V_B}$

On utilise l'expression de K_A et la condition $[B] = [BH]$:

$$K_A = [H_3O^+];$$

d'où: $pK_A = pH$

Graphiquement: à $V_A = \frac{1}{2}V_{AE}$

on a: $pH = 10,5$

donc: $pK_A = 10,5$

7- $K_A = \frac{[B][H_3O^+]}{[BH^+]}$

A partir de l'expression de K_A

$\frac{[B]}{[BH^+]} = \frac{K_A}{[H_3O^+]} = 10^{pH-pK_A}$ donc:

$$pH = pK_A + \log\frac{[B]}{[BH^+]}$$

$$= pK_A + \log\frac{1}{16} = 9,3$$

sur la courbe on lit $V_A \simeq 16,5mL$

22 L'étiquette d'un vinaigre d'alcool du commerce indique 8°.

Le degré d'acidité exprime la masse, en grammes, d'acide éthanoïque pur contenu dans $100g$ de vinaigre.

On considérera le vinaigre comme une solution aqueuse d'acide éthanoïque (ou acide acétique) de formule CH_3COOH.

On se propose de déterminer, au cours d'une séance de travaux pratiques, la

Scanned with CamScanner

concentration C en acide éthanoïque de ce vinaigre.

La température de la salle est de $25°C$.

Données:

masse volumique du vinaigre: $1,01g.mL^{-1}$;

masse molaire de l'acide éthanoïque $M = 60g.mol^{-1}$.

On prépare une solution S de volume $V = 100mL$ de concentration en acide éthanoïque $c = \frac{C}{10}$.

On prélève un volume $V_A = 20,0mL$ de la solution S que l'on dose avec la solution d'hydroxyde de sodium, en mesurant le pH en fonction du volume V_B de soude versé.

La solution d'hydroxyde de sodium a pour concentration: $C_B = 0,10mol.L^{-1}$.

Le point d'équivalence E a pour coordonnées: $V_{BE} = 26,6mL$ et $pH_E = 8,5$.

1- Faire un schéma annoté du dispositif expérimental de ce dosage.

2- Si le dosage était réalisé sans pH-mètre, quel indicateur coloré faudrait-il choisir parmi les indicateurs suivants:

Nom de l'indicateur	Zone de virage (pH)
Héliantine	3,2-4,4
Rouge de méthyle	4,4-6,2
Bleu de bromothymol	6,0-7,6
Phénolphtaléine	8,2-9,8

3- Ecrire l'équation-bilan de la réaction de dosage, considérée totale.

4- Calculer la concentration c de la solution S. En déduire la concentration C du vinaigre.

5- Calculer le degré d'acidité du vinaigre. Comparer le résultat à l'indication initiale.

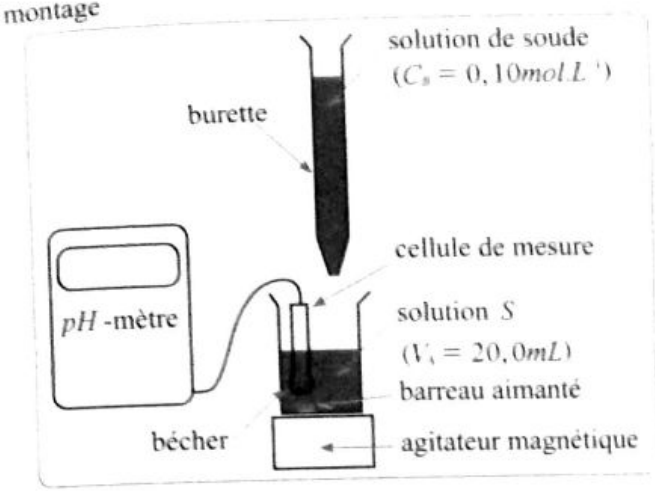
6- Après ajout d'un volume $V_B = 10mL$, le pH du mélange est $pH = 4,54$.

6.1- Exprimer le rapport $\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]}$ dans ce mélange en fonction de V_B et V_{BE}.

6.2- Déterminer la valeur de pK_A du couple CH_3COOH/CH_3COO^-.

Solution

1-Schéma du montage



2- Pour un dosage acidobasique donné, le meilleur indicateur coloré est celui dont la zone de virage encadre le pH du mélange réactionnel à l'équivalence, ici, $pH_E = 8,5$. En effet, lorsqu'il en est ainsi, l'indicateur coloré change de couleur au passage par l'équivalence.

En consultant les zone de virage des indicateurs colorés disponibles, nous constatons que c'est la phénolphtaléine, dont la zone de virage s'étend de $pH = 8,2$ À $pH = 9,8$ qui répond le mieux à ce critère, et qu'il convient donc d'utiliser pour ce dosage en l'absence de pH-mètre.

3- $CH_3COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow CH_3COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$

4- l'équivalence:

$CV_A = C_BV_{BE}$, d'où: $c = C_B\frac{V_{BE}}{V_A}$

Numériquement:

$c = \frac{0,1.26,6}{20} = 0,133mol.L^{-1}$

Et puisque $c = \frac{C}{10}$:

$C = 10c = 1,33mol.L^{-1}$

5- 1ère méthode:

- La concentration du vinaigre en acide acétique est $C = 1,33mol.L^{-1}$.

Un litre de ce vinaigre contient donc une quantité de matière d'acide acétique:

$n = 1,33mol$.

Ainsi, la masse d'acide acétique contenue dans $1L$ de vinaigre est:

$m = nM$; numériquement: $m = 79,8g$.

- Par ailleurs, d'après les données de l'énoncé, la masse volumique du vinaigre étudié est $1,01g\ mol^{-1}$. Dans ces conditions, la masse de $1L$, soit $1000mL$, de vinaigre vaut $m_{vinaigre} = 1000 \times 1,01 = 1010g$

Scanned with CamScanner

• Un litre de vinaigre a une masse $m_{vinaigre} = 1010g$ et contient $m = 79,8g$ d'acide acétique pur. Son degré d'acidité D est donc, par définition de cette grandeur:

$D = \frac{m \times 100}{m_{vinaigre}}$ application numérique:

$D = 7,9°$

Cette valeur expérimentale du degré d'acidité du vinaigre est très proche de celle indiquée sur l'étiquette (8°) puisqu'elle n'en diffère que de: $\frac{8-7,9}{8} \simeq 1,2\%$,

ce qui est tout à fait acceptable compte tenu des incertitudes inhérentes au dosage (notamment sur la détermination de V_{BE}).

2ème méthode:

Le degré D exprime le rapport massique suivant:

$$D = \frac{m(acide)}{m(solution)} = \frac{n(acide).M}{m(solution)}$$
$$= \frac{n(acide).M}{\rho.V solution}$$
$$= \frac{n(acide)}{V(solution)} \cdot \frac{M}{\rho}$$
$$= \frac{C.M}{\rho} \longleftarrow (g/L)$$
$$= \frac{1.33,60}{1.01.10^3} = 7,9.10^{-2}$$
$$= 7,9\% = 7,9°$$

cela veut dire qu'il y a $7,9g$ d'acide dans 100 mL de la solution de vinaigre.

6.1- Utilisons le tableau d'avancement de la réaction du dosage avant l'équivalence ($V_B < V_{BE}$): $n_f(CH_3COO^-) = x_f$

et $[CH_3COOH] = C_A V_A - x_f = C_B V_{BE} - x_f$

les ions hydroxydes jouent le rôle de réactif limitant: $x_{max} = n_f(HO^-) = C_B V_B$.

Puisque la réaction de dosage est totale:

$x_f = x_{max} = C_B V_B$.

donc:

$$\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]} = \frac{C_B V_{BE} - C_B V_B}{C_B V_B} = \frac{V_{BE}}{V_B} - 1$$

6.2- L'expression de K_A permet d'écrire

$K_A = 10^{-pK_A} = \frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}.1^{-pH}$;

d'où: $pH = pK_A + \log\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}$;

soit encore:

$pK_A = pH + \log\frac{[CH_3COOH]}{[CH_3COO^-]}$;

$pK_A = pH + \log\left(\frac{V_{BE}}{V_B} - 1\right)$.

A.N:

$pK_A = 4,54 + \log\left(\frac{26,6}{10} - 1\right) = 4,76$.

23 L'ammonitrate est une engrais azoté solide, bon marché, très utilisé dans l'agriculture.

Il est vendu par sac de 50 kg et contient du nitrate d'ammonium ($NH_4NO_{3(s)}$). Sur le sac, on peut lire «pourcentage en masse de l'élément azote N 33%».

Afin de vérifier l'indication du fabricant, on dose les ions ammonium NH_4^+ présents dans l'engrais à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium ($Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$).

Données:

Couples acide/base: $NH^+_{4(aq)}/NH_{3(aq)}$; $H_2O_{(l)}/HO^-_{(aq)}$

Masse molaire en $g.mol^{-1}$: Azote N:14; Oxygène O:16; Hydrogène H: 1

Le nitrate d'ammonium est très soluble dans l'eau, sa dissolution dans l'eau est totale selon la réaction: $NH_4NO_{3(s)} \longrightarrow NH^+_{4(aq)} + NO^-_{3(aq)}$

L'équation support de tirage est:

$NH^+_{4(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow HN_{3(aq)} + H_2O_{(l)}$

1.1- L'ion ammonium $NH^+_{4(aq)}$ est-il un acide ou une base selon Brönsted? Justifier la réponse.

Une solution d'engrais S est obtenue en dissolvant $m = 6,0g$ d'engrais dans une fiole jaugée de volume $V = 250mL$. On prépare ensuite un bécher contenant un volume $v_a = 10mL$ de la solution S.

La solution contenue dans ce bécher est titrée par une solution d'hydroxyde de sodium ($Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}$) à la concentration molaire apportée $C_B = 0,20mol.L^{-1}$.

Le volume titrant versé à l'équivalence est $V_{BE} = 14mL$.

1- Définir l'équivalence d'un dosage.

2- En vous aidant, éventuellement, d'un tableau descriptif de l'évolution de la réaction, déterminer la relation entre la quantité de matière d'ions ammonium dosés $n_0(NH_4^+)$ et la quantité d'ions hydroxyde versés à l'équivalence $n_e(HO^-)$.

3- En déduire la valeur de $n_0(NH_4^+)$.

4- Quelle quantité de matière d'ions ammonium $n(NH_4^+)$ a-t-on dans la fiole jaugée de 250mL? En déduire la quantité de nitrate d'ammonium présente dans cette fiole.

Scanned with CamScanner

5- Quelle masse d'azote y a-t-il dans une mole de nitrate d'ammonium? En déduire la masse d'azote présente dans l'échantillon.

6- Le pourcentage massique en élément azote est le rapport entre la masse d'azote présente dans l'échantillon et la masse de l'échantillon.

Calculer le pourcentage massique en azote de l'échantillon. Le comparer à celui fourni par le fabricant et conclure.

Solution

1- Le point d'équivalence est l'état du mélange auquel l'éspèce à doser et l'éspèce dosante sont toutes les deux les réactifs limitants de la réaction du dosage.

2- $n_0(NH_4^+) - x_{max} = 0$ et;

$ne(HO^-) = C_B V_{BE} - x_{max} = 0$

Ceci donne: $n_0(NH_4^+) = n_e(HO^-)$

3- $n_0(NH_4^+) = C_B V_{BE} = 0,2.14.10^{-3}$

$= 2,8.10^{-2} mol$

4- $CA = \frac{n_0(NH_4^+)}{V_A} = \frac{n(NH_4^+)}{V}$

d'où: $n(NH_4^+) = n_0(NH_4^+).\frac{V}{V_A}$

$= 2,8.10^{-2}.\frac{250}{10}$

$= 7.10^{-2} mol$

5- Le nitrate d'ammonium a pour formule: (NH_4^+, NO_3^-)

Chaque mole de ce composé contient donc 2 moles d'azote (N).

alors: $n(N) = 2n(NH_4^+) = 0,14 mol$;

et: $m(N) = n(N).M(N) = 0,14.14,$

$= 1,96 g$.

6- $(\%\mathbb{N}) = \frac{m(N)}{m(engrais)} = \frac{1,96}{6}.$

$= 32,67\% \simeq 33\%$

Scanned with CamScanner